PUBLICACIONS DE L'INSTITUT DE CIENCIES
COL·LECCIÓ DE CURSOS DE FÍSICA I MATEMÀTICA
Dirigida per E. TERRADAS, *Membre de l'Institut*

TEORÍA DE LA REPRESENTACIÓ CONFORME

CONFERENCIES DONADES EL JUNY DE 1915

PER

J. REY PASTOR

redactades per

E. TERRADAS

INSTITUT D'ESTUDIS CATALANS
PALAU DE LA DIPUTACIÓ
BARCELONA

TEORÍA

DE LA REPRESENTACIÓ CONFORME

PUBLICACIONS DE L'INSTITUT DE CIENCIES
COL·LECCIÓ DE CURSOS DE FÍSICA I MATEMÀTICA
Dirigida per E. TERRADAS, *Membre de l'Institut*

TEORÍA DE LA REPRESENTACIÓ CONFORME

CONFERENCIES DONADES EL JUNY DE 1915

PER

J. REY PASTOR

redactades per

E. TERRADAS

INSTITUT D'ESTUDIS CATALANS
PALAU DE LA DIPUTACIÓ
BARCELONA

TALLERS D'ARTS GRÀFIQUES HENRICH Y C.ª, S. EN C. — CÒRCEGA, 348, BARCELONA

SUMARI

CONFERENCIA III

El lema de Schwarz (1870) i les seves aplicacions

1. Enunciat i demostració.
2. La representació couforme d'un recinte sobre el cercle és única.
3. Generalisacions del lema de Schwarz.
4. Teoremes de Carathéodory.

CONFERENCIA IV

Teoremes de Koebe i de Bieberbach

1. Comparació entre els radis de dos recintes, un dels quals és interior a l'altre.
2. Limitació del radi d'un recinte simplement conex i d'una fulla (Koebe).
3. Limitació del radi en estar la distancia de O al contorn compresa entre un màxim i míuim finits (Koebe).
4. Teorema de la deformació del contorn (Koebe).
5. Teorema de l'àrea mínima (Bieberbach).

CONFERENCIA V

Teorema d'existencia de Riemann

1. Diversos tipus de recintes simplement conexos d'una fulla.
2. Reducció del recinte a un tipus únic.
3. Limitació (Abschätzungssatz) de Carathéodory.
4. Teorema de convergencia (Carathéodory).
5. Teorema d'existencia (Koebe-Carathéodory).

Notes. — 1.ª

2.ª (Teorema de Borel).

CONFERENCIA VI

Principi de simetría de Schwarz. Mètode alternat. Representació conforme de recintes limitats per curves analítiques

1. Enunciat i demostració del principi de simetría.
2. Reflexió respecte d'un segment.
3. Reflexió respecte d'una curva analítica.
4. Mètode alternat de Schwarz.

CONFERENCIA VII

Aplicació de la representació conforme al problema de Dirichlet

1. Funcions harmòniques.
2. El problema de Dirichlet.
3. Resolució del problema de Dirichlet per al cercle.

CONFERENCIA VIII

Teorema general de la representació conforme

1. Classificació general dels recintes.
2. Successions convergents de recintes.
3. Cas A. — La successió de radis és convergent.
4. Nou teorema de limitació.
5. Cas B. — La successió de radis és divergent.
   Bibliografía.

INTRODUCCIÓ

Per acord de l'Institut veuen avui la llum pública, traduides al català, les lliçons del curs breu que explicàrem a la primavera de 1915.

Exigint l'estudi de la representació conforme coneixements molt extensos de les teoríes de funcions analítiques i del potencial, i no formant part ni la una ni l'altra dels programes universitaris d'Espanya, ens proposàrem organitzar la teoría de les representacions conforme, prescindint en absolut d'aquesta darrera, i reduint al mínim possible els coneixements necessaris de la primera.

Ha estat guia molt útil per al nostre obgecte el mètode elemental exposat en una memoria recent de Carathéodory per a demostrar el teorema de Riemann, puix per un camí anàleg, i previs uns quants teoremes nous sobre les funcions analítiques, hem aconseguit demostrar el teorema general de Koebe-Poincaré per als recintes d'infinites fulles, d'una manera ràpida i directa, que el lector podrà comparar amb el mètode de Koebe, exposat en la obra de Study.

La introducció d'un element que anomenem *radi* del recinte, ens ha permès sistematitzar i demostrar molt elementalment els teoremes de deformació que constitueixen el fonament dels mètodes de Koebe, sense necessitat d'utilitzar les funcions de Green.

Assenyalem finalment la resolució elementalíssima del problema de Dirichlet que hem obtingut, simplificant la solució de Bôcher fins a reduir el problema a un de Geometría mètrica.

Per a donar-li les gracies més expressives, consignem el nom del meu estimat amic el Prof. Terradas, organitzador d'aquests cursos monogràfics i propulsor entusiasta del progrés científic d'Espanya, i que ha redactat amb gran afecte les nostres conferencies.

RESSENYA HISTÒRICA

La teoría de la representació conforme té son origen en la Cartografía. En l'antiguitat es reconeixía ja la possibilitat de representar la superficie de la Terra sobre un pla, de manera que es conservessin els angles i la proporcionalitat de les longituts. Essent angulars els instruments usats en la navegació, té major importancia la conservació d'angles, i per això són *conformes* les primeres projeccions conegudes, és a dir: l'*estereogràfica* d'Hiparc (any —150), aplicada a les cartes terrestres per Gema Frisio (1540), i la de *Mercator* (1569).

Lambert (1772) planteja per primera vegada el problema de la representació conforme més general de l'esfera sobre del pla, i estudía un sistema general de projecció, de tal manera, que donant valors extrems a un paràmetre resulten com a casos particulars l'estereogràfica i la de Mercator.

Lagrange avança un altre pas, i efectúa la representació conforme de totes les superficies de rotació. Però la seva contribució més important és la idea de la introducció de les funcions de variable complexa; a ella es deu tot el desenrotllament ulterior de la teoría.

Finalment, Gauss resol el problema de la representació conforme d'una superficie analítica qualsevulga sobre el pla, i per tant, el de dues superficies entre sí.

La importancia de la representació conforme en la Cartografía ha minvat actualment, puix en els mapes de regions petites es conserven les *àrees*, component-se els de gran regions en fulles separades d'escala variable. En canvi, la representació conforme ocupa un lloc preeminent en la Matemàtica pura, sobre tot en la Teoría de funcions, de Riemann ençà.

Hi ha una diferencia essencial entre el problema de Riemann i el de Gauss, en la qual radica precisament la importancia actual d'aquesta teoría; diferencia que es presenta en tots els problemes de l'Anàlisi.

El problema de Gauss es pot enunciar així: *Donades dues superficies analítiques, efectuar una transformació conforme de l'entorn d'un punt d'una en l'entorn d'un punt de l'altra.* Determinar en cada cas quina serà l'extensió d'aquests entorns, és qüestió inabordable *a priori* i estranya a la nostra voluntat; depèn del camp de convergencia que tingui la funció trobada. Aquest problema és molt indeterminat i pertany a la Geometría; s'anomena *representació conforme en petit.*

Donats dos troços finits de superficie, o més senzillament, dos recintes plans, és possible establir entre ambdós una representació *biunívoca, continua* i *conforme?* I amb quines condicions suplementaries està determinada? Aquest és el problema de la *representació conforme en gran,* el més difícil i el més important, problema que constitueix el nucli de tota la teoría actual de la *representació conforme* i de la *uniformació de funcions.*

Riemann, en la seva famosa tesi doctoral, planteja i resol, en que imperfectament, aquest problema de la representació conforme en gran, que anem a enunciar literalment: *Entre dos recintes donats, simplement conexes, es* *pot establir una correspondencia biunívoca i continua de manera que siguin semblants les parts infinitesimals; es pot donar arbitrariament dos punts interiors homòlegs i dos punts de contorn homòlegs, quedant així determinada la correspondencia.*

Aquest problema de Riemann se pot reduir a efectuar la representació conforme d'un recinte simplement conex qualsevulga, sobre el cercle unitat, puix resolta aquesta representació per a dos recintes qualsevulga, queda obtinguda la representació conforme d'ells dos entre sí.

La solució donada per Riemann es fundaba en la integració de l'equació de Laplace, i aquesta integració es reduía en última essencia a trobar una funció que fés mínima la integral doble

$$\Omega(u) = \int\int\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dS$$

Segons Riemann, ja que totes les funcions u de $(x\ y)$ fan positiva aquesta integral, n'hi haurà una que la farà *mínima*, i aquesta ens resol el problema.

Weierstrass (1850) va assenyalar la insuficiencia d'aquesta demostració (*), que es basa en la conclusió no rigorosa anomenada *principi de Dirichlet*, i diversos matemàtics escometeren allavors la difícil empresa de donar un fonament sòlid al teorema de Riemann.

El primer que ho aconseguí fou Schwarz i quasi al mateix temps Neumann cap al 1870 per a recintes molt generals. Tots dos fan una llarga marrada per arribar a la solució del problema, i avui han estat perfeccionats i

(*) Per convence's d'aquesta insuficiencia, no més cal observar: 1.° Entre infinits nombres positius pot no existir un mínim. 2.° Encare que sempre existeix un *extrem inferior* per a aquest conjunt, es a dir, un nombre igual o menor que tots, al qual s'atancen aquests tan com se vulgui, tal nombre pot no pertanyer al conjunt.

simplificats notablement els llurs procediments. Nosaltres n'exposarem la part que encara té valor actual, sobre tot el mètode *alternat* per a l'equació de Laplace.

La tercera època comença amb Poincaré i comprèn els treballs més importants de Koebe, Carathéodory, Bieberbach, etc. De tots ells ens ocuparem en aquestes conferencies.

CONFERENCIA I

PROPIETATS DE LES FUNCIONS ANALÍTIQUES

I. Funció linial de variable complexa

La funció linial més general és del tipus

$$w = \frac{az+b}{cz+d}$$

amb la condició $ad \neq bc$. Recordem les quatre propietats fonamentals de la representació geomètrica que aquesta defineix entre els plans z i w.

a) Transforma les circumferencies en circumferencies.

b) Conserva els angles en magnitut i sentit, és a dir, és una transformació *conforme directa*.

c) La raó doble de quatre punts z_1 z_2 z_3 z_4 és igual a la dels seus transformats. Es a dir:

$$\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4} : \frac{z_2-z_3}{z_2-z_4} = \frac{w_1-w_3}{w_1-w_4} : \frac{w_2-w_3}{w_2-w_4}$$

d) Dos punts harmònicament separats (*) respecte d'una circumferencia, es transformen en dos punts harmò-

---

(*) Recordem que dos punts MN son anomenats ***conjugats***, ***inversos*** o ***harmònicament separats*** respecte d'una circumferencia de centre C quan están en un diàmetre harmònicament separats pels seus extrems. Es a dir, quan compleixen la condició $OM.ON = r^2$.

Les circumferencies que pasen per MN són ortogonals respecte de la dada, i recíprocament.

nicament separats respecte de la circumferencia homòloga.

La demostració és immediata, observant que la funció linial general queda composta de les següents funcions elementals:

$w = z + \alpha$ (Translació del pla definit pel vector α.)

$w = kz$ (Dilatació del pla pel factor $|k|$ i gir d'amplitut arg k.)

$w = \frac{1}{z}$ (Inversió respecte del cercle unitat, i rebatiment respecte de l'eix x.)

Per a les dues primeres són evidents les quatre propietats; per a la tercera funció basta observar que en la inversió geomètrica o transformació per radis vectors recíprocs, es conserven els angles invertint-se el sentit, i que la simetría respecte de l'eix d'abcisses els torna a invertir, quedant, per tant, invariants en magnitut i sentit.

Les funcions dels dos primers tipus transformen els cercles en cercles; però la inversió transforma un cercle en altre cercle, o en l'àrea exterior a un cercle, o en un semiplà, segons l'origen sigui exterior, interior o estigui en la circumferencia.

Com a conseqüencia, la funció linial general transforma cada cercle en altre cercle, o en l'àrea exterior a un cercle, o en un semiplà, segons el punt $z = -\frac{d}{c}$ estigui fòra, dins o en la circumferencia dada.

A evitar aquestes distincions que disminueixen la generalitat de les conclusions, tendeix el conveni de considerar el símbol ∞ com un número, i l'infinit del pla com un punt, així com en la Geometría projectiva convé considerar-lo com una recta. Amb aquesta convenció, les quatre propietats abans enunciades tenen una validesa general, sense cap excepció, considerant les rectes com circunferencies que contenen el punt de l'infinit del pla.

2. Funcions analítiques. Equacions característiques

Recordem breument les nocions més elementals de la teoría.

La variable complexa $w=u+iv$, és anomenada *funció de la variable* $z=x+iy$ si a cada valor de z pres en cert recinte G del pla z, correspòn un o diversos valors de w. Per tant, si es $w=f(z)$, és

$$u=\varphi(x,y),\ v=\psi(x,y);$$

i recíprocament, tota combinació de dues funcions qualsevulga $\varphi(x, y)+i\psi(x, y)$ és una funció de z. Es podría desenrotllar una teoría general de funcions des de aquest ampli punt de vista; però no tindría un interès especial per equivaler a la teoría de les funcions de dues variables reials.

$f(z)$ és anomenada *monogena* o *derivable* en el punt z_o. si $\dfrac{\Delta w_o}{\Delta z_o}$ té un límit únic quan $|\Delta z_o| \longrightarrow$ o independent de l'argument de Δz_o. S'anomena *analítica en un recinte* G, si és finita i monogena en tots els seus punts. *Analítica en un punt* z_o, quan ho és en un cert entorn (*) d'aquest punt (**).

Condició necessaria i suficient perquè w sigui analítica en el recinte G, és que u i v satisfacin en tot punt d'aquest recinte les equacions de Cauchy y Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

(*) Entorn d'un punt és el sistema de punts situats en una àrea que té aquell punt interior. Generalment en lo que segueix se pendrà per tal àrea, la de un cercle de radi convenient.

(**) No basta que sigui monogena en el punt z_o. Aixi, per exemple, la funció $w=xy+iy^2$ és monogena en el punt $z=$o, peró no hi és analítica.

Aleshores té el símbol:

$$w' = f'(z) = \frac{df(z)}{dz} = \lim \frac{\Delta w}{\Delta z},$$

un significat únic en cada punt, i per tant subsisteixen les mateixes regles de derivació de les funcions reals (funció de funció, funció composta, suma, diferencia, producte i quocient, etc.).

3. Representació conforme en petit

Per ésser $f(z)$ continua i uniforme en un cert entorn del punt z_o, a tota curva c que passa per z_o correspón una curva c' que passa per w_o; de la definició de derivada resulta suposant $f'(z_o) \neq o$, :

$$\lim \arg \Delta w_o = \lim \arg \Delta z_o + \arg f'(z_o)$$

és a dir: si la tangent a la curva c en z_o forma l'angle α amb el semieix $+x$, la curva homòloga c' admet tangent en el punt w_o, y forma l'angle

$$\alpha' = \alpha + \arg f'(z_o);$$

els dos feixos de tangents homòlogues en z_o i w_o són, doncs, iguals i acordes; l'angle de gir és precisament $\arg f'(z_o)$.

Per tant, si $z_o\, z_1\, z_2$ i $w_o\, w_1\, w_2$ són dos ternes de punts homòlegs, ambdós triangles són sensiblement semblants si se'ls pren suficienment petits. D'aquí ve el nom de *representació conforme.*

Qualsevol que sigui $f'(z_o)$ és

$$\lim \frac{|\Delta w_o|}{|\Delta z_o|} = |f'(z_o)|$$

anomenarem aquest número $|f'(z_o)|$ que és el límit de la raó dels segments homòlegs, *dilatació* en el punt z_o.

Ara es planteja aquesta qüestió: els punts homòlegs del recinte G, en el qual està definida la funció analítica $f(z)$, ¿omplen sisquera un entorn del punt w_0 o tal vegada hi ha punts tan pròxims com se vulgui a w_0 que no tenen corresponent en el pla z? Aquesta qüestió essencial resol el següent

TEOREMA D'INVERSIÓ. *Si* $f(z)$ *és analítica en el punt* z_0 *(això és, analítica en un cert entorn* α de z_0) *i a més* $f'(z_0) \neq 0$, *es pot trobar un entorn* β' *del punt* w_0, *de modo que* $|w - w_0| < \mathbf{k}$, *i tal que a cada un dels seus punts corresponguí un valor en* α. *La funció* $z = F(w)$ *així obtinguda en el recinte* β' *és analítica en ell i satisfà a:*

$$F'(w) = \frac{1}{f'(z)}$$

En efecte: pel teorema d'existencia de les funcions implícites (*), les equacions

$$u = \varphi(x, y) \qquad\qquad v = \psi(x, y)$$

defineixen en un cert entorn β' del punt (u_0, v_0) dues funcions de (x, y), uniformes, continues i diferenciables per ser son jacobià en dit punt:

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = |f'(z)|^2 > 0$$

La funció $z = F(w)$ així definida en β' és analítica, ja que

$$\lim \frac{\Delta z}{\Delta w} = \lim \frac{1}{\dfrac{\Delta w}{\Delta z}} = \frac{1}{f'(z)}$$

(*) La seva demostració es pot veure, per exemple (amb aplicació a aquest cas especial) en nostre *Resumen de las lecciones de Análisis matemático 2.° curso*, Victoriano Suárez, Madrid, 1916.

i per tant transforma l'entorn β' en un cert recinte β interior a α.

Resulta, doncs, que tota funció analítica $f(z)$ que compleix la condició $f'(z_0) \neq 0$, transforma biunívocamen t iconformement un cert entorn de z_0 en altre entorn de w_0. L'amplitut d'aquests entorns no es pot determinar *a priori*.

4. La integral de Cauchy i les seves aplicacions

Recordem finalment el teorema de Cauchy, conseqüencia immediata de la transformació de les integrals de área en integrals de contorn:

Si f(z) *és analítica en un recinte* G, *inclús en son contorn* C, *és:*

$$\int_C f(z)dz = 0$$

Amb aquest teorema es pot construir la major part de la Teoría de funcions analítiques. Deduirem en forma sistemàtica els resultats que hem d'utilitzar en aquestes conferencies.

I. *Si* f(z) *és continua en el recinte* G *inclús el seu contorn* C, *i és analítica en l'interior de* G, *el seu valor en cada punt interior és expressat per la integral de contorn presa en sentit positiu:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)dt}{t-z} \qquad [1]$$

L'únic punt en què la funció integrant no és analítica, és el $t=z$; traçant un entorn c de radi r, en el recinte anul·lar Cc la funció és analítica, i per tant:

$$\int_C \frac{f(t)\,dt}{t-z} - \int_c \frac{f(t)\,dt}{t-z} = 0$$

Per als punts de la circumferencia c podem posar:

$$f(t)=f(z)+\delta;$$

i la igualtat es transforma així:

$$\int_C \frac{f(t)dt}{t-z}=f(z)\int_c \frac{dt}{t-z}+\int_c \frac{\delta dt}{t-z}$$

El primer sumand val $2\pi i f(z)$; per ésser f funció continua en el punt z, la diferencia $f(t)-f(z)=\delta$ pot ésser tan petita com se vulgui prenent r suficientment petita, i com que el primer membre és independent de r té d'ésser nula aquesta 2.ª integral.

II. *Si* f(z) *és analítica en* G *té derivades de tots els ordres, que també són analítiques en* G.

Puix derivant [I] sota el signe integral, resulta:

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)dt}{(t-z)^2},$$

i en general:

$$f^n(z)=\frac{\underline{|n}}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)dt}{(t-z)^{n+1}}$$

III. Es sabut que tot conjunt de números té un extrem superior M i un extrem inferior m; i que tota funció $f(x, y)$ continua en un recinte contornejat (i per tant finita) assoleix al menys en un punt son valor màxim M i en altre son valor mínim m (*).

El mòdul $|f(z)|$ d'una funció analítica en un recinte contornejat G és funció continua de (x, y); hi hà, doncs, al menys dos punts z_o, z, dins de G o en el contorn, tals que $|f(z_o)|=$M, $|f(z_o)|=m$. Per ésser analítica la funció es verifica:

Si s'exceptúa el cas en que f(z) *sigui una constant, tot punt* z_0 *en que* $|\mathrm{f}(z)|$ *assoleix son valor màxim* M *és situat necessariament en el contorn.*

(*) Vegi's, per exemple, la nostra obra abans esmentada (pàg. 227).

Puix si en un punt interior és $|f(z_o)|=\mathrm{M}$, i la funció no és constant, prenent un entorn seu de radi r, en un punt al menys d'aquesta circumferencia c (i per tant en un arc) serà $|f(z)|<\mathrm{M}$, i essent

$$f(z_o)=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(t)dt}{t-z_o},$$

$$|f(z_o)|<\frac{1}{2\pi}\int_c \frac{|f(t)|\,|dt|}{|t-z_o|}<\frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{M}}{r}\int_c |dt|=\mathrm{M},$$

contra la hipòtesi $|f(z_o)|=\mathrm{M}$.

IV. Si els valors de $f(z)$ en el contorn d'una circumferencia són $<\mathrm{K}$, es dedueix també per a $f'(z_o)$ una altra limitació:

$$|f'(z_o)|\leqq\frac{1}{2\pi}\int\frac{|f(t)|\,|dt|}{r^2}<\frac{\mathrm{K}}{2\pi r^2}\int|dt|=\frac{\mathrm{K}}{r}$$

D'on resulta aquest important teorema de Liouville: *Si una funció és analítica en tot el pla i s'hi conserva finita o sigui:* $|\mathrm{f}(z)|<\mathrm{K}$, *és* $\mathrm{f}(z)=$*constant.*

Puix essent en qualsevol punt z_o del pla

$$|f'(z_o)|\leqq\frac{\mathrm{K}}{r}$$

i verificant-se això per a tot valor de z per gran que sigui, té d'ésser $f'(z_o)=o$.

5. Desenrotllament en serie

I. *Si* $\mathrm{f}(z)$ *és analítica en el recinte* G *i* a *és un punt interior, en tal punt interior de* G *es verifica:*

$$f(z)=f(a)+(z-a)f'(a)+(z-a)^2\frac{f''(a)}{\underline{|2}}+\dots+$$

$$+(z-a)^{n-1}\frac{f^{n-1}(a)}{\underline{|n-1}}+(z-a)^n\cdot\mathrm{P}_n(z)$$

essent $P_n(z)$ *una funció analítica que es pot expressar en la forma*

$$P_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(t)dt}{(t-a)^n(t-z)}$$

essent c *qualsevol circumferencia interior a* G *i de centre* a.

Tenim la identitat:

$$\frac{1}{t-z}=\frac{1}{t-a}+\frac{z-a}{(t-a)^2}+\ldots.+\frac{(z-a)^{n-1}}{(t-a)^n}+\frac{(z-a)^n}{(t-a)^n(t-z)}$$

multiplicant per $\frac{f(t)}{2\pi i}$ i integrant al llarg de c resulta:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(t)}{t-z}dt=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(t)}{t-a}dt+\frac{z-a}{2\pi i}\int_c \frac{f(t)dt}{(t-a)^2}+\ldots.+$$
$$+\frac{(z-a)^{n-1}}{2\pi i}\int_c \frac{f(t)dt}{(t-a)^n}+\frac{(z-a)^n}{2\pi i}\int_c \frac{f'(t)}{(t-a)^n(t-z)}dt$$

fórmula que demostra el teorema, si es tenen en compte els resultats del § 4.

II. Per a tot punt z interior a c es verifica, essent r el radi de c,

$$\frac{|z-a|}{r}=l<1;$$

per altra part, anomenant d la distancia de z a la circumferencia c és $|t-z|\overline{\gtrless}d$; anomenant, doncs, M el màxim de $|f(t)|$,

$$|R_n(z)|\overline{\lessgtr}\frac{|z-a|^n}{2\pi}\int_c \frac{|f(t)||dt|}{|t-a|^n|t-z|}\overline{\lessgtr}\frac{M}{2\pi d}l^n\int_c |dt|=\frac{Mrl^n}{d}$$

i com que $l^n\longrightarrow 0$ al créixer n indefinidament, resulta:

Tota funció f(z) *analítica en un recinte* G *es pot desenrotllar en tot punt interior* a *en serie de potencies:*

$$f(z)=f(a)+(z-a)f'(a)+(z-a)^2\frac{f''(a)}{\underline{|2}}+\ldots.$$

que convergeix i coincideix amb la funció en tot punt interior de qualsevol cercle de centre a *que estigui contingut dins del recinte.*

6. Teorema de Weierstrass

Es diu que una successió de funcions

$$f_1(z),\quad f_2(z)\;\ldots\ldots\; f_n(z),\;\ldots\ldots$$

convergeix uniformement cap a una funció $f(z)$ en un recinte G, si a cada número positiu ε es pot fer correspondre un valor $n = \nu$, tal que

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \text{ per a } n = \nu,\ \nu+1,\ \nu+2,\ \ldots\ldots$$

verificantse això en tots els punts z de G, sense modificar ν.

La successió d'integrals d'aquestes funcions al llarg de una curva tancada c continguda en G té per límit $\int_c f(t)dt$. En efecte: no més cal observar que fent variar z sobre c és $f_n(t)$ funció complexa d'una variable real única (per exemple, la longitut de l'arc) i descomposta en ses parts real i imaginaria, es pot aplicar el teorema de les funcions reals (*).

Amb aquestes breus nocions podem demostrar el següent teorema fonamental de Weierstrass:

Si la successió de funcions analítiques

$$f_1(z),\quad f_2(z),\quad f_3(z),\;\ldots\ldots$$

convergeix uniformement en tot recinte parcial g *d'un recinte* G *cap a una funció* f(z), *aquesta és analítica en* G.

Sigui z un punt interior de G i prenem un recinte g de contorn c (per exemple un cercle) que contingui z en

(*) Aquest es pot veure en la nostra obra esmentada, (pàg. 180).

son interior. La successió

$$\frac{f_n(t)}{t-z} \qquad \left(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots.\right)$$

convergeix també uniformement en la curva c cap a la funció $\frac{f(t)}{t-z}$, ja que

$$\left|\frac{f_n(t)-f(t)}{t-z}\right| < \frac{1}{d}\left|f_n(t)-f(t)\right|$$

anomenant d la distancia de z a c; i per la convergencia uniforme de $f_n(z)$ en tot el g, aquesta fracció será $<\varepsilon$ des d'un valor de n independent de t. Per consegüent:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f_n(t)}{t-z}dt = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(t)}{t-z}dt$$

i pel teorema de Cauchy:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} f_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(t)}{t-z}dt$$

per tant el límit de $f_n(z)$ a causa d'ésser expressat per aquesta integral, és una funció analítica de z, i com que per hipòtesi aques límit és $f(z)$, aquesta funció és analítica en tot punt interior a G.

CONFERENCIA II

REPRESENTACIÓ CONFORME DE RECINTES ELEMENTALS

1. Noció de radi d'un recinte

Anomenarem radi d'un recinte en el pla de la variable z, en el punt O del mateix, el radi del cercle que en el pla de la funció w és transformat conforme d'aquell recinte en les condicions següents:

1.ª El centre d'aquest cercle és el punt homòleg de O.

2.ª La dilatació $\left|\frac{dw}{dz}\right|$ val 1 per a dit punt.

Aquesta noció té pel successiu molta importancia, i per això anem a calcular els radis de recintes senzills per als quals les fórmules que donen la representació conforme sobre el cercle són fàcils de trobar.

Certament, hi caben encara dos dubtes, que son: si serà possible la transformació conforme de tot recinte en un cercle amb les condicions indicades, és a dir, si a cada punt interior a tot recinte correspòn un radi. En segón lloc, si serà possible efectuar aquesta representació de maneres distintes resultant radis diversos. En la conferencia pròxima demostrarem que això no s'esdevé; i per tant, els valors que obtenim avui són els únics possibles.

Abans de fer dit càlcul exposarem algunes propietats generals.

1.ª Sigui un recinte qualsevulga que té per corresponent conforme el cercle de radi 1 que anomenarem per abreujar C essent el centre d'aquest cercle punt homòleg de l'origen en aquell. Sigui $w=f(z)$ la funció que dóna la correspondencia conforme. El valor absolut de la dilatació en l'origen serà $|f'(o)|$ i és necessariament diferent de zero. Si es transforma C en un cercle de radi $\frac{1}{|f'(o)|}$ tindrem realisada la representació conforme del recinte donat en altre en què el valor absolut de la dilatació per a l'origen és l'unitat. Per tant, coneguda la dilatació $|f'(o)|$ en l'origen el radi del recinte donat val

$$\frac{1}{|f'(o)|}$$

2.ª Suposem que es coneix el radi r d'un cert recinte en un punt O_z. Si $w=f(z)$ transforma aquest recinte en un altre, es pot calcular fàcilment el radi R en el punt O_w conjugat de O_z. En efecte:

Sigui ζ el pla de la variable en el qual el cercle de radi

$$r=\frac{1}{\left|\frac{d\zeta}{dz}\right|_o}$$

representa conformement el recinte donat en el pla ζ. De la mateixa manera, fent la representació conforme del recinte transformat en w sobre el pla ζ,

$$R=\frac{1}{\left|\frac{d\zeta}{dw}\right|_o}$$

Però, com que

$$\frac{dw}{d\zeta}=\frac{dw}{dz}\,\frac{dz}{d\zeta},$$

resulta:

$$R=|f'(o)|r$$

D'aquí es dedueix la regla següent: Per a obtenir R cal només multiplicar r pel valor absolut de la dilatació corresponent.

2. Representació conforme d'un cercle en un altre

Suposem que a punt O_z d'un dels cercles C, correspòn el centre O_w en l'altre (fig. 1). Pendrem els centres com a origens en llurs plans respectius. L'eix d'abscisses en el pla

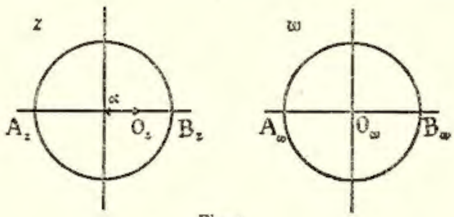

Fig. 1

de les z determina el diàmetre A_z B_z. Sigui α la distancia de O_z a l'origen. Es sabut que la funció linial estableix la correspondencia conforme entre cercles. Com que té tres paràmetres, anem a determinar-la imposant-li, apart de la condició d'ésser O_z i O_w conjugats, la de ser-ho A_z i A_w així com B_z i B_w. Es fàcil veure com la homografía

$$w = \frac{z - \alpha}{1 - z\alpha}$$

compleix les condicions exigides. Determinant $\frac{dw}{dz}$ i fent $z = \alpha$ resulta com a valor del radi en O_z

$$\rho = \frac{1}{\left|\frac{dw}{dz}\right|_{z=\alpha}} = 1 - \alpha^2$$

3. Transformació d'un semiplà en un cercle

Considerant el semiplà com un cercle, es veu que la homografía convé perfectament a la transformació. Sigui O_z l'origen a una distancia α del límit del semiplà, A_z el peu de la distancia de O_z al límit esmentat. La transformació

$$w = \frac{z}{z+2\alpha}$$

fa correspondre al punt O_z el punt O_w, centre de C al A_z el A_w i al punt de l'infinit en el pla z el punt B_w diametralment oposat al A_w i situat com ell en l'eix d'abscisses.

El radi per a O_z es calcula fàcilment, obtenint-se:

$$r = 2\alpha$$

4. Transformacions d'angles formats per rectes o cercles

Sigui un angle d'obertura $h\pi$, i en ell un punt O_z que tingui per coordenades polars R i φ. La transformació

$$w = z^{\frac{1}{h}}$$

transforma l'angle en semiplà. El mòdul de O_z es converteix en $R^{\frac{1}{h}}$ i l'argument en $\frac{\varphi}{h}$. Del semiplà es passa ja fàcilment al cercle. Amb la notació del cas anterior, si es vol que O_z es transformi en el centre, s'haurà de posar

$$\alpha = R^{\frac{1}{h}} \operatorname{sen} \frac{\varphi}{h}$$

Per al càlcul del radi podem aplicar la propietat general 2.ª demostrada abans i que hem traduit en una regla:

$$\rho = \left| \frac{dz}{dw} \right|_{w = R^{1/h}} 2\alpha = 2hR \operatorname{se} \frac{\varphi}{h}.$$

Si l'angle hagués estat un quadrant,

$$h=\frac{1}{2} \quad \text{i} \quad \rho=\mathrm{R}\ \mathrm{sen}\ 2\varphi.$$

El segment o lúnula que representen les figures 2 i 3, en els quals la corda situada sobre l'eix d'abscisses val la unitat es transformen fàcilment en angles mitjançant

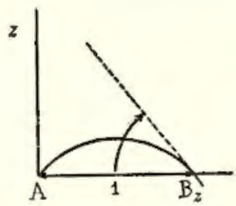

Fig. 2

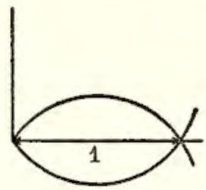

Fig. 3

la inversió amb potencia 1. Per consegüent és fàcil trobar les funcions definitives de representació sobre C, així com els radis.

El semicercle de radi 1 es pot transformar també fàcilment en un quadrant mitjançant la inversió amb potencia 2:

$$w=\frac{2}{z}.$$

Del quadrant es passa fàcilment a C. Per a fixar la posició del transformat O′ del punt O (fig. 4) definit per la seva distancia α al centre D i per equidistar dels extrems A i E del diàmetre que limita el semicercle, considerem aquell punt O com a intersecció de la recta OD i de la circumferencia EOA. A la recta correspòn per inversió el cercle de radi 1 que té per centre A′ transformat de A i situat a la distancia 1 del nou origen.

Per altra part, la transformada de la circumferencia serà una recta que farà amb l'eix d'abscisses el mateix angle φ que la tangent a la citada circumferencia forma amb l'eix d'abscisses en A. Ultra això aquesta recta passa

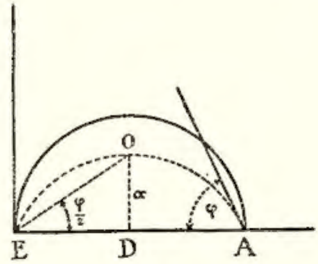

Fig.

evidentement per A′. Recordant el valor del radi per a un quadrant, s'obté

$$\rho_c = R \operatorname{sen} 2\varphi$$

I per tant, tenint esment que $\alpha = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$, resulta

$$\rho_c = \frac{4\alpha(1-\alpha^2)}{(1+\alpha^2)^2}$$

I per al radi del semicercle

$$\rho = \frac{1+\alpha^2}{2}. \quad \rho_c = \frac{2\alpha(1-\alpha^2)}{1+\alpha^2}$$

Un sector de cercle qualsevulga es pot transformar, primer en semicercle i després en C.

5. Representació conforme de recintes amb talls

Sigui ara la representació conforme d'un pla proveit d'un tall (fig. 5), i cerquem el radi per a un punt O que dista α del vèrtex del tall isituat en la seva prolongació. Mitjançant la funció

$$w=\sqrt{z}$$

es passa del pla sencer al semiplà. El punt O′ transfor-

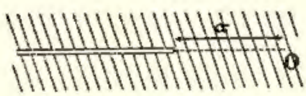

Fig. 5

mat del O queda a una distancia $\sqrt{\alpha}$ del límit del semiplà. D'aquest es passa fàcilment a C. Resulta per a valor del radi

$$\rho=4\alpha$$

Si el punt O estés definit per les seves coordonades polars z i φ referides al tall com a eix polar i al seu vèrtex com a pol, es tindría

$$\rho=4r \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2}$$

Considerem el cas del cercle de radi 1 amb un tall AB (fig. 6), el vèrtex del qual dista α de l'origen. Es trans-

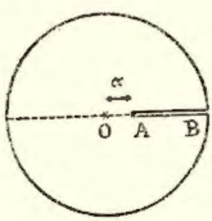

Fig. 6

formarà primer el cercle anterior en un altre del que el tall s'allargui per tot el radi mitjançant una senzilla homografía. De la nova figura es passa fàcilment a un semicercle. Heus-aquí les dues transformacions

$$z' = \frac{z - \alpha}{1 - z\alpha}$$

$$w = \sqrt{z'}$$

El radi per al centre és

$$\rho = \frac{4\alpha}{(1 + \alpha)^2}$$

6. Representació conforme sobre C d'alguns recintes de dues fulles

En primer lloc sigui el pla de dues fulles una de les quals té un tall rectilini al llarg d'una semirrecta traçada pel punt de ramificació. Pendrem aquesta com a semieix $+x$. Amb la transformació

$$w = \sqrt[4]{z}$$

es passa al semiplà d'una fulla. Un punt A de coordenades polars r i φ passa a tenir les coordenades $\sqrt[4]{r}$ i $\frac{\varphi}{4}$. El radi en el mateix val

$$\rho = 8r \operatorname{sen} \frac{\varphi}{4}.$$

El cercle de dues fulles, essent el centre el seu punt de ramificació, es converteix en el cercle ordinari mitjançant

$$w = \sqrt{z}\,.$$

Un punt que disti α del centre del cercle primitiu dista $\sqrt{\alpha}$ del centre del transformat. El radi corresponent val

$$\rho = 2\sqrt{\alpha}(1 - \alpha).$$

Si el punt de ramificació no és el centre sinó que en dista α, es redueix al cas anterior mitjançant la coneguda homografía:

$$z' = \frac{z-\alpha}{1-z\alpha}.$$

Per al centre del doble cercle s'obté en aquest cas el radi

$$\rho = \frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha}.$$

7. Exemple de representació conforme obtinguda mitjançant una funció trascendent

Consideri 's l'exponencial

$$w = e^z = e^x(\cos y + i \text{ sen } y)$$

que transforma l'espai comprès entre les dues paral·leles $y = \pm\frac{\pi}{2}$ en un semiplà. L'origen no es transforma en el nou origen sinó en el punt de l'eix real situat a la distancia 1 de l'origen, el qual és el transformat del punt de l'infinit.

Del semiplà es passa a C per la transformació sabuda. El radi en l'origen del pla de les z val

$$\rho = 2$$

Si la distancia entre les paral·leles dades suposades simètriques respecte de l'eix x hagués estat k, el resultat fóra

$$\rho = 2\,\frac{k}{\pi}.$$

CONFERENCIA III

EL LEMA DE SCHWARZ (1870) I LES SEVES APLICACIONS

1. Enunciat i demostració

La importancia de la proposició de què anem a tractar ha estat posada de relleu per Carathéodory (1912) que l'ha adoptada com a lema per a les seves investigacions:

Sigui f(z) *una funció analítica i regular per a* $|z|<1$, *amb les condicions següents:*

$$f(o)=0\,,$$
$$|f(z)|<1 \quad \text{per a} \quad |z|<1.$$

Aleshores, es verifica en tots els punts $0<|z|<1$ *interiors al cercle:*

$$|f(z)|<|z|;$$

fòra de quan la funció es redueix a un gir:

$$f(z)=ze^{i\theta}\,,$$

en el qual cas,

$$|f(z)|=|z|.$$

Demostració:

Amb radi $\rho<1$ tracem en el pla z un cercle C_ρ de centre en l'origen; en ell és analítica la funció $f(z)$ i per tant desenrotllable en la serie (Conf. 1.ª):

$$f(z)=az+bz^2+cz^3+\ldots.$$

La funció $\varphi(z)=\frac{f(z)}{z}$ és també analítica en C_ρ inclús en la periferia; assoleix, doncs, son valor màxim en la periferia. El valor $|\varphi(z)|$ en un punt qualsevulga $|z|<\rho$ serà *igual* o *menor* que aquest màxim:

$$|\varphi(z)| \overline{\overline{<}} \text{ màx de } \frac{|f(z)|}{|z|} < \frac{1}{\rho}.$$

I verificant-se això per a *tots* els valors $\rho < 1$, serà en tot punt de C,

$$|\varphi(z)| \overline{\overline{<}} 1.$$

Hi caben dos casos.

1.^er^ En tot punt z és $|\varphi(z)|<1$ o sigui $|f(z)|<|z|$. És la primera part del lema.

2.^ón^ Es verifica en algún punt interior $|\varphi(z)|=1$ i, aleshores haurà d'ésser $\varphi(z)=\text{const.}$, i aquesta constant de la forma $e^{i\theta}$; per consegüent $f(z)=ze^{i\theta}$. Queda demostrada la segona part del lema.

Ni en l'enunciat ni en la demostració hem fet hipòtesis sobre la naturalesa de $f(z)$ en la periferia de C, en la qual pot ni estar sisquera definida. Si la funció dada complís la condició de l'enunciat per a $|z| \overline{\overline{<}} 1$, la demostració se simplifica, i en aquesta forma restringida utilisa Koebe el lema de Schwarz.

Cal, doncs, només que en alguns punts del contorn hi hagi una concentració, és a dir, que sigui $|f(z)|<1$, perquè en tot punt interior hi sigui, éssent $|f(z)|<|z|$.

2. La representació conforme d'un recinte sobre el cercle és única

Sigui w una funció de z que efectúa la representació conforme de l'interior del cercle C_z sobre l'interior d'un recinte G_w essent per a $z=0$, $w=0$. Si existeix una altra variable ζ que permet passar conformement de C a la mateixa àrea G_w amb $\zeta=0$ per a $w=0$, z i ζ estaràn relacionades conformement. En aquesta correspondencia es verifica que per a $z=0$, $\zeta=0$; per a $|z|<1$, $|\zeta|<1$, per tant, o bé es verifica en tot punt de C_z

$$|\zeta|<|z| \qquad \text{o} \qquad \zeta=ze^{i\theta}$$

La primera part de la disjuntiva és inadmisible perquè amb el mateix raonament arribaríem a la contraria considerant z funció de ζ. Queda la segona. Prenent els eixos d'abscisses segons direccions homòlegues. queda

$$\zeta=z$$

Si no és el centre el punt fixat en el cercle com a homòleg d'un punt del recinte, cal només transformar-lo per una funció linial en altre cercle en què sigui el centre i aplicar la conclusió anterior. Per consegüent: *La representació conforme d'un recinte simplement conex damunt d'un cercle és determinada per dos punts interiors corresponents i dues direccions homòlegues.*

Queda així demostrat que a cada punt interior d'un recinte correspondrà al màxim un *radi*. (V. Conf. II).

3. Generalisacions del lema de Schwarz

I. Consideri's el cas en què l'homòleg de l'origen O en C_z no és l'origen, és a dir, en què $w\neq 0$ per a $z=0$. Suposem sempre que, per a $|z|<1$ el mòdul de la funció és $|w|<1$. Transformant el C_w mitjançant la funció

$$\zeta=\frac{a-w}{aw-1}$$

en què a (fig. 7) és la distancia a l'origen de l'homòleg O_w de 'origen O_z, s'obté una representació en què l'homòleg de O_w és el nou origen. I a tot punt interior a C_w correspòn un punt interior a C_ζ. A la representació conforme entre ζ i

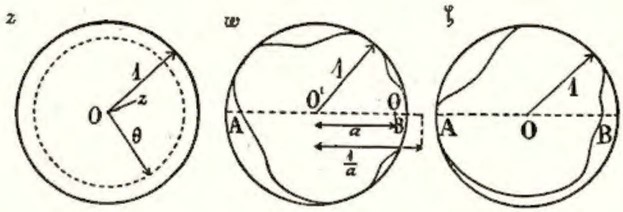

Fig. 7

z pot aplicar-se ja el lema de Schwarz. En conseqüencia per a tot valor de z dins de C_z serà:

$$|\zeta| \leq |z|.$$

Es a dir, si

$$|z| = \theta \overset{=}{<} 1$$

es té

$$|\zeta| = \theta' \overset{=}{<} 1$$

essent

$$\theta' \overset{=}{<} \theta.$$

Als dos punts de la circumferencia de radi θ corresponen punts interiors als de la circumferencia de radi θ en el pla de la ζ. En el pla de la w corresponen als punts d'aquesta circumferencia els d'una altra C'_w en la qual O_w i O''_w són conjugats, essent O''_w conjugat de O_w respecte de C_w. Tots els punts de C'_w són interiors (fòra d'un) als de la circumferencia de centre O'_w i el radi de la qual és la màxima distancia de O'_w a C'_w, això és

$$\frac{a + \theta}{a\theta + 1}.$$

Per consegüent, per a $|z|=\theta \leqq 1$, es té la limitació següent

$$|w| \leqq \frac{|w(o)|+\theta}{|w(o)|\theta+1}.$$

II. Sigui un cercle C_z el centre del qual no sigui l'origen i de la transformada w del qual se sab que té el mòdul inferior a M mentre z estigui dins d'aquell cercle. Sigui z_o son centre i r el radi.

Transformant C_z en altre cercle $C_{z'}$, que tingui per centre l'origen, mitjançant

$$z'=\frac{z-z_o}{r}$$

i d'altra part el cercle C_w de radi M en altre de radi 1 mitjançant

$$w'=\frac{w}{M}$$

podem aplicar l'anterior generalisació (I) del lema de Schwarz a la transformació de w' en z'. Es tindrà, si $|z'| \leqq \theta < 1$,

$$w' \leqq \frac{\left|\frac{w(z_o)}{M}\right|+\theta}{\left|\frac{w(z_o)}{M}\right|\theta+1}$$

o sigui, si $\frac{|z-z_o|}{r} \leqq \theta < 1$,

$$|w| \leqq M\frac{|w(z_o)|+M\theta}{|w(z_o)|\theta+M}.$$

Si $z_o=o$,

$$|w| \leqq M\frac{|w(o)|+M\theta}{|w(o)|\theta+M}.$$

Si no es coneix $w(o)$ però se sab que és inferior a $M_o<M$, podem escriure

$$|w| \leqq M\frac{M+M\theta}{M+M_o}.$$

4. Teoremes de Carathéodory

I. Suposem una funció analítica i regular tal que, si $|z| \overline{\overline{<}} 1$,

$$|\Re(w)| < \varepsilon$$

essent ε una constant positiva qualsevulga i designant per $\Re f(z)$ la part real de $f(z)$. Aquesta condició ens diu que tot punt interior a C_z té el seu corresponent en el pla w entre dues paral·leles a l'eix d'ordenades traçades aquestes a distancies $+\varepsilon$ i $-\varepsilon$ respectivament d'aquell eix. Anem a demostrar que fixat dins de C_z un cercle de radi $\tau < 1$, la funció w no pot estendre indefinadament la representació del cercle $|z| \overline{\overline{<}} \tau$ en el sentit de les ordenades (*), sinó que aquestes estàn també compreses entre certs límits independents de la funció w.

A aquest objecte es transformará w mitjançant la funció

$$\zeta = e^{\frac{\pi i}{2\varepsilon} w}$$

S'obté axís de la regió compresa entre aquelles paral·leles, el semiplà.

D'aquest es passa al cercle C_z mitjançant

$$\zeta = \frac{1-\chi}{1+\chi}.$$

Evidentment C_z queda a l'interior de C_χ. Per tant si $|z| = \tau \overline{\overline{<}} 1$,

$$|\zeta| < \tau$$

Passant a w,

$$\Re\left(\frac{\pi i}{2\varepsilon} w\right) < \log \frac{1+\tau}{1-\tau}$$

o bé, anomenant $\Im(z)$ la part imaginaria dividida per i,

$$\frac{\pi}{2\varepsilon} |\Im(w)| < \log \frac{1+\tau}{1-\tau}.$$

(*) Si consideréssim el cercle total C_z el teorema seria fals.

Per tant, les ordenades estàn compreses entre dues rectes simètriques que disten de l'eix d'abscisses:

$$\pm \frac{2\varepsilon}{\pi} \log \frac{1+\tau}{1-\tau}$$

II. Considerem finalment una funció analítica regular $w=f(z)$ amb les condicions següents

$$f(o)=1$$

$$h<|f(z)|<\frac{1}{h} \quad , \quad h<1$$

és a dir, $f(z)$ és situada en l'anell comprès entre

$$C_{hw} \text{ i } C_{\frac{w}{h}}$$

Fixat un cercle C_z en que $|z| \leqq \tau < 1$, li correspòn una certa área que és dins de l'anell, qualsevulga que sigui $f(z)$; anem a cercar una limitació d'aquesta àrea, independent de $f(z)$.

L'anell es transforma en l'àrea del cas anterior mitjançant la funció

$$w'=\log w=\log|w|+i\varphi$$

essent φ l'argument de w. Aplicant, doncs, el resultat anterior, es té

$$|\mathfrak{I}(w')|<\frac{-2\log h}{\pi} \log \frac{1+\tau}{1-\tau} \qquad (|z|=\tau \leqq 1).$$

Però $\mathfrak{I}(w')$ és l'argument φ; per tant l'àrea transformada està en l'angle $\pm\varphi$ essent donat φ pel valor que és a la dreta del signe $<$ en l'expressió anterior.

CONFERENCIA IV

TEOREMES DE KOEBE I DE BIEBERBACH

1. Comparació entre els radis de dos recintes, un dels quals és interior a l'altre

La introducció del concepte del radi d'un recinte ens permet simplificar notablement i exposar en forma sistemàtica, sense necessitat d'utilisar les funcions de Green, algunes propietats demostrades incidentalment en les investigacions de Koebe, que hem d'utilisar sovint.

Es diu que *un recinte g és dins d'un altre G*, o que $g \prec G$, *quan tots els punts de g estàn en* G *i aquest conté punts que no són en g*.

Considerem els radis d'un punt O interior a g i per tant a G. Es fàcil veure que *el radi* R *de* O *respecte a* G *és major que el radi r de* O *respecte a g*. En efecte: al transformar G en C en el pla z' per exemple, els punts del transformat de g formen un recinte interior a $C_{z'}$, que anomenarem g'. Considerem per altra part C_w transformat de g' en el pla de w. Aplicant ara a la correspondencia entre z i w el lema de Schwarz, es tindrà dins de C_w,

$$|w|<|z|.$$

Posant $w=\varphi(z)$ i aplicant la desigualtat anterior a l'origen, resulta

$$|\varphi'(o)|>1$$

Tenint això en compte, la igualtat

$$\left|\frac{dw}{dz}\right|_o=\left|\frac{d\varphi}{dz'}\right|_o\left|\frac{dz'}{dz}\right|_o$$

es converteix, en virtut del valor de radi d'un recinte, en aquesta desigualdat

$$\frac{1}{r} > \frac{1}{R}$$

la qual demostra la proposició.

2. Limitació del radi d'un recinte simplement conex i d'una fulla (Koebe)

Imaginem un punt O interior a un recinte en les condicions de l'enunciat; sigui d la seva mínima distancia al contorn i D la màxima, la qual pot no tenir límit finit.

D'aquesta limitació de distancies al contorn es dedueix una altra limitació de radis. En efecte: el recinte més extens que es pot imaginar en un pla, tal que la seva menor distancia a un punt O sigui d és el determinat per un tall arbitrari del pla el vèrtex del qual disti d de O i que per l'altre costat s'estengui indefinidament. Així mateix, aquest recinte està inclòs en el pla de dues fulles del qual el tall sigui la linia de pas d'una fulla a l'altra. El pla doble es farà simplement conex, v. g., per un tall segons la direcció de d i que s'estén des del seu vèrtex indefinidament. Imaginem que el pla primitiu constitueixi la fulla superior, i que el tall esmentat del pla de dues fulles estigui en la fulla inferior. Del pla doble es passa al semiplà mitjançant la transformació $w = \sqrt[4]{z}$. La direcció del tall es pendrà com a eix de les x i d'aquesta manera apareix el semiplà transformat contenint en son interior el pla primitiu. Les coordenades primitives del punt O són d com a radi vector i 180° com a argument. Les seves transformades són $\sqrt[4]{d}$ i 45°. El radi per a aquest punt val

$$8d \operatorname{sen} 45° = 4\sqrt{2}\,d.$$

Per tant, en virtut del teorema anterior, el radi de O en el recinte donat no serà major que aquest. Per altra part, traçant una circumferencia de centre O i radi d es forma un recinte interior al donat, i, com que el seu radi és evidentment d, resulta que, anomenant ρ el radi O en el recinte donat,

$$d<\rho<4\sqrt{2}d.$$

Hem pres per a ρ un límit superior suficient per al nostre objecte, valent-nos d'un recinte auxiliar molt senzill; però hom pot trobar límits superiors un xic més petits de la mateixa forma kd. El menor de tots el valors possibles de k s'anomena *constant de Koebe.* (*)

3. Limitació del radi en estar la distancia de O al contorn compresa entre un màxim i mínim finits (Koebe)

Sigui a el primer i λa el segón ($\lambda < 1$). El doble cercle de radi a compendrà evidentment el recinte donat. Amb un tall apropiat, v. g., en la fulla inferior, es farà simplement conex el doble cercle. Podem pendre la linia de trànsit d'una fulla a l'altra arrancant del punt A del contorn, la distancia del qual al punt considerat O és λa.

El valor del radi en O per al doble cercle és (Conferencia II, § 6),

$$\rho=\frac{2\sqrt{\lambda}}{1+\lambda}a;$$

com que la fracció és inferior a 1,

$$\lambda a<\rho<\frac{2\sqrt{\lambda}}{1+\lambda}a<a.$$

(*) Nom proposat per Osgood. La seva determinació numérica exacta no és fàcil.

Resulta, doncs, ρ inferior constantment no sols a a (conseqüencia evident del § 1) sinó inferior a número fix menor que a.

Encara que el recinte donat omplís el cercle de radi a per complet, mentre comprengués el seu contorn un punt a menor distancia, es compliría la desigualtat anterior.

4. Teorema de la deformació del contorn (Koebe)

Sigui un cercle C_{qz} de radi q en el pla de la variable z i considerem el conjunt de totes les funcions analítiques regulars $w=f(z)$ dins de C_{qz} tals que amb elles es transformi C_{qz} en un recinte simplement conex d'una fulla amb les condicions següents

$$f(0)=0 \qquad f'(0)=1.$$

La funció pendrà evidentment la forma següent, perfectament definida dins de C_{qz}

$$w=z+az^2+bz^3+\ldots.$$

Teorema. *El recinte transformat de* C_{qz} *conté un cercle fix* C_{rz} *de radi* r. 2.$^{\text{on}}$ *El recinte transformat d'un cercle fix* $|z|\overline{\leq} q\tau < q$ *està contingut en un cercle de radi determinat* R *independent de* w.

La demostració que segueix té dues parts.

Primera part: La transformada en w *de* C_{qz} *inclou* C_r *essent* $r>0$. En efecte: sigui d la mínima distancia al contorn de O_w transformat de l'origen O_z centre de C_{qz}. Segons el que s'acaba de demostrar en (2)

$$d<\rho<kd$$

essent k la constant de Koebe. Ara, el radi de O_w és evidentment q. Tenim, doncs

$$d<q<kd$$

d'aquí

$$d > \frac{q}{k}.$$

Segona part: Qualsevulga que sigui la funció w, per a tot $C_{q\tau z}$ interior a C_{qz} la transformada és interior a una circumferencia, el radi R *de la qual no depèn de la funció $w = f(z)$, sinó sols de τ.* En efecte: sigui S el transformat de C_z i O_w l'homòleg del centre i origen O_z. Sigui d_w la mínima distancia de O_w al contorn de S, la qual, segons ço que s'acaba de dir, serà major que $\frac{1}{k}$. Per altra part, és evident que $d_w < 1$. Consideri's ara un recinte format pel pla doble, en què es deixa arbitraria la linia de trànsit, però que es fa simplement conex amb un tall rectilini en la fulla inferior, per exemple, a partir del punt 1. Es evident que S quedarà tot ell inclòs dins d'aquest recinte. Mitjançant una transformació ja coneguda, es pot passar del doble pla a $C_{w'}$. Sigui S' el transformat de S, el qual anirà inclòs en $C_{w'}$. En la correspondencia conforme entre les z i les w', la transformada de C_z quedarà dins de $C_{w'}$. El lema de Schwarz condueix per a

$$|z| \overline{\overline{<}} \tau < 1$$

a

$$|w'| < \tau.$$

Per tant, en el pla w, tota transformada S_w del cercle $C_{q\tau z}$ de radi $\tau < 1$ és inclosa en el transformat de $C_{\tau w'}$.

Examinant la funció que realisa la correspondencia entre w i w' es fa palès que a $C_{q\tau w'}$ correspòn una curva en el pla w la distancia de la qual al centre és inferior a cert límit K que depèn de τ exclusivament.

Es fàcil estendre el teorema de C_z a C_{qz}; cal només multiplicar per q els mòduls en totes les representacions, resultant aleshores els recintes transformats del cercle $C_{q\tau}$ dins d'un cercle de radi Kq.

Prenent com a recinte auxiliar el pla doble amb el tall $\underline{1\infty}$, el valor que resulta per a K és $2\dfrac{1+\tau^2}{(1-\tau)^2}$

5. Teorema de l'àrea mínima (Bieberbach)

Al transformar C_{qz} per una funció de la forma

$$w = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots .$$

s'ha demostrat que el mòdul d de la transformada estava comprès entre un límit inferior major que q i un altre de superior; $d < q < kd$.

Suposant els plans w i z de manera que es corresponguin els origens i els eixos de les quantitats reals, la transformada de C_{qz} entrarà dins de C_{qz} i part d'ella mateixa quedarà fòra de C_{qz}.

Vejam les àrees dels dos recintes corresponents.

$$\text{Area de } C_{qz} = \int_0^q \int_0^{2\pi} r\,dr\,d\varphi = \pi q^2.$$

Per a obtenir l'àrea de la transformada caldrà només multiplicar els valors de r i dr pel mòdul de la dilatació $|f'(z)|$ ja que es tracta de representació conforme.

$$\text{Area}_w = \int_0^q \int_0^{2\pi} r\,|f'(z)|^2\,dr\,d\varphi.$$

Sigui $\overline{f}$ la conjugada de f obtinguda canviant i per $-i$. Es tindrà designant per α_i el valor absolut de a_i:

$$f'(z) = 1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \dots .$$

$$\overline{f}'(z) = 1 + 2\overline{a}_2\,\overline{z} + 3\overline{a}_3\,\overline{z}^2 + \dots .$$

d'on

$$|f'(z)|^2 = 1 + 4\alpha_2^2 r^2 + 9\alpha_3^2 r^4 + \dots .$$
$$+ 2a_2 e^{\varphi i} + 3a_3 e^{2\varphi i} + \dots .$$
$$+ 2\overline{a}_2 e^{-\varphi i} + 3a_3 e^{-\overline{2\varphi} i} + \dots .$$

essent φ l'argument de z. Aquestes potencies de $e^{\varphi i}$ a l'integrar entre O i 2π desapareixen i queda

$$\text{Area}_w = \pi q^2 + 2\pi\alpha_2^2 q^4 + 3\pi\alpha_3^2 q^5 + \dots . > \pi q^2 .$$

D'on se dedueix que la transformada té una àrea *sempre major* que la del cercle primitiu. A l'inrevés, una vegada hagim demostrat l'existencia d'una funció que transforma un recinte qualsevulga simplement conex en un cercle (problema de Riemann), *la funció buscada serà la que faci mínima l'àrea del recinte transformat.*

Per a trobar, doncs, la representació d'una àrea damunt del cercle es podrà operar aproximadament mitjançant funcions de la forma polinomia

$$z = w + a_2 w^2 + a_3 w^3 + \dots .$$

en què el nombre de coeficients és finit i que es determinen per la condició d'ésser

$$\int\int |z'|^2 r\, dr\, d\varphi = \text{mínim}.$$

CONFERENCIA V

TEOREMA D'EXISTENCIA DE RIEMANN

1. Diversos tipus de recintes simplement conexos d'una fulla

Ja és sabut que s'anomena conex un recinte d'una fulla quan es pot passar d'un dels seus punts a un altre qualsevol mitjançant una linia trencada d'un nombre finit de costats dins del recinte. Considerarem aquest format per punts tals que traçant al seu voltant un cercle de radi prou petit, els punts d'aquest son interiors al recinte.

Es diu *simplement conex* un recinte tal que prenent qualsevol curva tancada de Jordàn (*) dins d'ell, una de les dues regions en què aquesta divideix el pla queda completament dins del recinte. Si és possible el traçat d'una curva de Jordàn, de manera que de les dues regions en què la curva divideix el pla no n'hi ha cap de compresa completament en el recinte donat, aquest no és simplement conex.

D'aquí en avant, mentre no es digui res en contra, es parlarà de recintes simplement conexos.

Hi ha tres tipus de recintes simplements conexos en pla, i com a prototipus de cada un podem pendre:

1.er El pla indefinit o complet.

2.ón El pla incomplet o sense el punt de l'infinit.

3.er El cercle C_1 exclòs el seu contorn.

(*) Curva tancada de Jordàn es un conjunt de punts en correspondencia biunívoca i continua amb els punts d'una circumferencia.

Tots tres tipus de recinte són irreductibles, és a dir que no es pot passar mitjançant funcions analítiques regulars de l'un a l'altre, perquè, per una part, segons el teorema de Liouville (Conf. 1.ª, § 5), una funció analítica que es conserva finita en tot el pla és una constant; no és doncs possible la representació conforme del pla complet ni incomplet damunt del cercle. Per altra banda, no és possible el pas del pla complet a l'incomplet perquè tota funció analítica regular en el pla complet és una constant.

Ara, doncs, *donat un recinte simplement conex qualsevol,* una de tres: no exclou cap punt, en el qual cas és el pla complet, o n'exclou un tot sol, en el qual cas es pot representar evidentment sobre el pla incomplet, o *exclou un sistema continu de punts formant una linia o una àrea, en el qual cas anem a demostrar que és sempre representable conformement sobre un cercle.*

2. Reducció del recinte a un tipus únic

El recinte donat, tant si exclou una àrea com si exclou una curva, es pot transformar en un altre contingut en el cercle i contenint així mateix el centre d'aquest cercle.

α) Considerem el primer cas. Sigui O un punt de l'àrea exclosa, r el radi d'un cercle contingut completament dins de l'àrea. Prenent O com a origen, la funció

$$z' = \frac{r}{z}$$

transforma tot el recinte donaten un altre dins de C i que conté evidentment el centre d'aquest com a punt interior.

β) Tractant-se d'una linia, sigui A l'origen de la mateixa i B altre punt tal que units A i B per una recta aquesta no talla la curva en cap punt entre A i B. Anomenem a i b els valors de z en aquells punts. La transformació

$$z' = \frac{z-a}{z-b}$$

conduirà a una figura tal com la figura 8, en què el punt E a la distancia 1 de A és el transformat del punt a l'in-

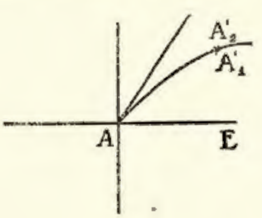

Fig.

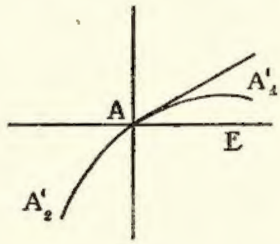

Fig. 9

finit. Obrint ara el recinte al llarg de la curva transformada mitjançant la nova transformació

$$w = \pm\sqrt{z'}$$

en la qual s'usa el signe + per a la vora superior de la curva i el — per a la inferior, s'obtindrà un nou recinte de la forma indicada en la figura 9 i transformant en cercle el semiplà que el conté, queda resolta la qüestió.

3. Limitació (Abschätzungssatz) de Carathéodory

Sigui un recinte $g_z \prec C_z$ i g_w el transformat dins de C_w. Suposem la transformació realisada per la funció $f(z)$ subjecta a les condicions següents:

$$f(o) = o$$
$$f'(o) = a > o \qquad (a \text{ real})$$

Suposem també que g_z i g_w contenen en llur interior els punts de C_{hz} i C_{hw}. Anem a demostrar que, fixant un cercle de radi $h\tau < h$, interior a g_z es verifica

$$\alpha) \qquad |w-z| \overline{\overline{<}} m$$

I que, essent m una quantitat que depèn sols de h i τ, i fixat τ, és

$$\beta) \qquad \lim m = 0 \quad \text{per } h \longrightarrow 1$$

En efecte. Posem

$$t = \frac{w}{z}.$$

Es fàcil veure que, per als punts de g_z exteriors a C_{hz},

$$|z| \overline{\overline{>}} h$$

$$|w| < 1$$

i per consegüent

$$|t| < \frac{1}{h}.$$

De la mateixa manera, per a punts interiors al cercle esmentat, posant $z = hz'$,

$$|z'| \overline{\overline{<}} 1$$

$$|w| < 1$$

de manera que, aplicant el lema de Schwarz,

$$|w| < |z'|$$

i, per tant

$$|t| < \frac{1}{h}.$$

Així es que, per a tot punt de g_z

$$|t| < \frac{1}{h}.$$

Partint de g_w s'arribaría a la conclusió

$$\left|\frac{1}{t}\right| < \frac{1}{h},$$

per tant

$$h<|t|<\frac{1}{h} \qquad (a).$$

Aquesta igualtat, aplicada a l'origen, dóna

$$h<a<\frac{1}{h} \qquad (b).$$

Posem $t=at'$. La funció t' val 1 en l'origen, i en virtut de (a) i (b) satisfà a

$$h^2<|t'|<\frac{1}{h^2}$$

és a dir, està compresa dins una corona o anell. Ara bé, hem vist que aquesta funció que té una limitació de mòdul, la té també d'argument (Conf. III § 4):

$$|\varphi| \overset{=}{<} -\frac{2lh^2}{\pi} \log \frac{1+\tau}{1-\tau} = -\frac{4 \log h}{\pi} \log \frac{1+\tau}{1-\tau} \qquad (\tau<1).$$

Aquesta limitació es verifica per a tot punt de g_1 ja que aquests corresponen a mòduls τ inferiors a 1.

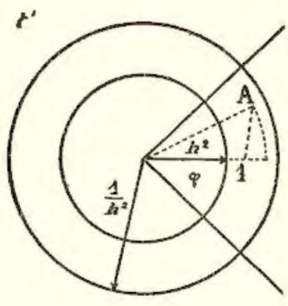

Fig. 10

Considerem ara la funció t' en un recinte limitat i sigui A undels seus punts. Cal notar (figura 10) que

$$|t'-1|<||t'|-1|+|t'||\varphi|$$

Ultra això, tant si $|t'|>1$ com si $|t'|<1$,

$$\big||t'|-1\big|<\frac{1}{h^2}-1.$$

També és evident, per ésser el mòdul d'una suma inferior a la suma dels mòduls, que

$$|t-1|\leqq|t-a|+|a-1|=a|t'-1|+|a-1|$$

i finalment

$$|w-z|=|t-1|\,|z|\leqq|t-1|h\tau.$$

Aquestes relacions tenint present que, en virtut de (*b*) i d'ésser $h<1$,

$$1<\frac{a}{h^2}<\frac{1}{h^3},$$

porten fàcilment a la limitació següent que demostra a la vegada α) i β):

$$|w-z|=\frac{1-h^3}{h^2}\tau+\frac{-4\log h}{h^2\pi}\tau\log\frac{1+\tau}{1-\tau}.$$

4. Teorema de convergencia (Carathéodory)

Sigui una successió indefinida de funcions analítiques regulars de la variable z.

$$f_1(z),\quad f_2(z),\;\ldots\ldots f_n(z),\;\ldots\ldots$$

que compleixen les condicions següents:

1.ª $f_n(0)=0$.

2.ª $f'_n(0)=a_n>0$ (*a* real).

3.ª *Les funcions* f_n *transformen l'àrea* $G_z\prec C_z$ (fig. 11) *en una altra àrea* $G_{nw}\prec C_w$ *biunívocament i conformement.*

4.ª *Cada área* G_{nw} *conté en son interior un cercle* $C_{h_n w}$, *de centre en l'origen de manera que*

$$h_1<h_2<\ldots\ldots h_n<\ldots\ldots,$$

essent

$$\lim h_n = 1 \quad \text{per a} \quad n \longrightarrow \infty .$$

En aquestes condicions afirmem que

$$f(z) = \lim f_n(z) \quad \text{per a} \quad n = \infty ,$$

és una funció analítica y regular que convergeix uniforme-

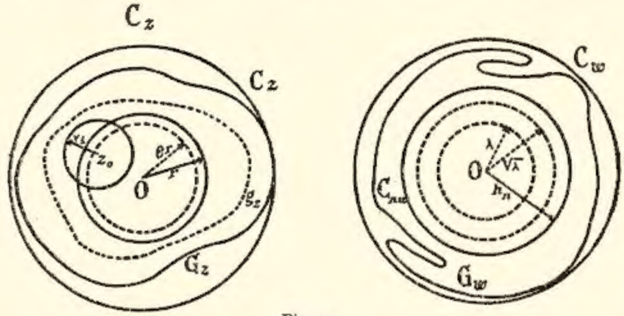

Fig. 11

ment en tot recinte g_z *de* G_z, *la qual transforma aquest en altre* G *que omple completament* C_w.

Si demostrem aquest teorema i arribem a formar les funcions f, quedarà demostrat el teorema de Riemann. La demostració del teorema comprèn tres parts que designarem per A, B i C.

A) *Limitació de les funcions* f.

Sigui z_0 un punt de G, i siguin u_1, u_2,... els seus transformats en el pla w mitjançant les funcions f_1, f_2 etc. *Tots els transformats es troben dins d'un cercle interior de radi* $\lambda < 1$.

En efecte: suposem en primer lloc, que z_0 es trobi interior a un cercle de centre O i radi r contingut completament en G. Per a tots els punts de cercle de radi $\theta r < r$ es verifica que $|f_n(z)| < 1$ i per tant, en virtut del lema de Schwarz,

$$|f_n(z)| < \frac{|z_0|}{r} \leqq \theta < 1 .$$

Aquesta desigualdat defineix ja un límit superior $\lambda_o < 1$ per a $|f_n(z)|$ dins del cercle de radi r i fins per als punts de la seva circumferencia. Considerem ara els punts d'un altre cercle de radi r_1 i centre z_o tot ell contingut en G. Per als punts del nou cercle es té així mateix

$$|z - z_o| < r \qquad ; \qquad |f_n(z)| < 1 .$$

Per tant, en virtut de la conseqüencia del lema de Schwarz, es verifica la limitació següent:

$$|f_n(z)| < \frac{\lambda_o + \theta_1}{1 + \lambda_o \theta_1} < 1 .$$

Tot punt de G es pot assolir amb un nombre finit d'entorns circulars segons la mateixa definició de G; per consegüent, per a tot punt de G pot trobarse un número $\lambda < 1$ que doni

$$|f_n(z)| < \lambda .$$

Sigui g un recinte qualsevol provist de contorn contingut en G i del qual sigui O un punt interior. Anem a demostrar que existeix un número fix $\lambda < 1$, tal que

$$|f_n(z)| < \lambda < 1 \qquad (\alpha)$$

per a tot valor de n i tot punt z que pertanyi a g. En efecte: considerem en cada punt z de g l'entorn circular corresponent i es trobarà segurament un número $\lambda_i < 1$ que satisfà en cada punt la condició α. Ara doncs amb un nombre finit d'entorns circulars, es pot cobrir g completament (T. de Borel) (*). En virtut d'això caldrà només pendre entre els λ_i corresponents, el màxim.

B) *Convergencia de la successió de funcions f.*

Els transformats successius dels punts del recinte g, es troben tots dins d'un cert cercle de radi $\lambda < 1$ en el

(*) Vegis la nota al final de la Conferencia.

pla w, per consegüent, i amb més raó, dins del cercle de radi $\sqrt{\lambda}$.

Com que els radis h_n dels cercles que contenen les transformades G_n de G van augmentant i tenen per límit 1, sempre es podrà trobar un valor N de n prou gran perquè

$$1 > h_N \gtreqqless \sqrt{\lambda} \qquad (\beta)$$

i tots el transformats successíus G_N, $G_{N+1} \ldots$ continguin el cercle de radi $\sqrt{\lambda}$ en son interior.

Es recordarà (Conferencia 1.ª, 6) que una successió de funcions f_1, $f_2, \ldots$ s'anomena uniformement convergent en un cert recinte g, quan, donat ε tan petit com se vulgui pugui donar-se un número únic n tal, que

$$|f_n(z) - f_{n+p}(z)| < \varepsilon \qquad p = 1, 2, 3, \ldots.$$

per a tot valor de z pres en g (i per tant f_n (z) dins del cercle λ).

Aquesta propietat en el cas que ens ocupa, es pot considerar com a conseqüencia fàcil del que tenim dit. En efecte: del moment en què $f_n(z)$ representa un punt de G_n i $f_{n+p}(z)$ un punt de G_{n+p}, els punts de G_n i G_{n+p} es corresponen conformement. El teorema de Carathéodory, abans demostrat, és perfectament aplicable perquè ambdós recintes contenen un cercle de radi h_n' i es corresponen els centres i les direccions paral·leles. Però el teorema ens indica que, en tot cercle interior a h_n, és a dir, de radi $h_n\tau$, $(\tau < 1)$ esdevé:

$$|f_n(z) - f_{n+p}(z)| < m$$

essent m una quantitat que tendeix a zero quan h_n tendeix a 1. Prenem $\tau = \sqrt{\lambda}$ i $n = N$ amb la cual cosa $h_N\tau$ serà superior a λ en virtut de (β) i, per tant, dins del cercle λ es verifica segurament la limitació anterior.

Sembla que encara es podría presentar la dificultat d'ésser una constant el valor de lim $f_n(z)$ per $n \rightarrow \infty$; en aquest cas no hi hauría representació conforme, però aquest cas no es pot presentar, puix essent la convergencia uniforme es verifica

$$f'(o) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(o) \qquad \text{i també } f'_n(o) = a_n > h_n > h_o.$$

C) *De com se defineix amb les funcions f, la funció que realitza la representació conforme.*

La successió de funcions defineix, doncs, pel teorema de Weierstrass, una funció analítica en tot el recinte G; aquesta efectúa la representació biunívoca i conforme de G sobre C_w. En efecte: els punts transformats de cada punt z_o de G són tots interiors a C_w; i per ésser

$$|f_n(z_o)| < \lambda < 1,$$

en el límit serà:

$$|f(z_o)| \leqq \lambda < 1.$$

A tot punt, doncs, de G correspòn un punt interior a C_w.

Per altra banda, donat un punt w, el transformat en el pla de les z és un punt únic. O sigui $w = f(z)$ té una sola arrel en z de mòdul menor que 1. Per a demostrar-ho hom es pot valer del teorema de Hurwitz que ens diu que, *si una equació es pot considerar com el límit d'una altra en què entra un paràmetre variable n, i al créixer n, a partir d'un cert valor d'aquell, el nombre d'arrels compreses entre certs límits romàn invariable, aquest mateix és el nombre d'arrels per al límit $n = \infty$.*

Ara doncs, quàntes arrels té $f_n(z) = w$ dins de C_z? Recordem que G i G_n tenen per hipòtesi correspondencia biunívoca i conforme. Ara doncs, es pot sempre escollir n prou gran perquè el punt donat w estigui dins del cercle de radi h_n contingut en G_n. Amb la cual cosa, per a la correspondencia entre G i G_n (així com aquells en què n és major) hi ha biunivocitat.

En tot el desenrotllament de les demostracions no s'ha parlat per a res del contorn de G. S'esdevé que la correspondencia en els punts del contorn ens pot donar punts de C_w discontinuament, i no haver-hi encara correspondencia o finalment pot existir correspondencia continua. Això però depèn de cada cas particular. Si el contorn està constituit per curves analítiques, la correspondencia en la circumferencia C_w es continua, com veurem un altre dia.

5. Teorema d'existencia (Koebe-Carathéodory)

Sigui A un punt del contorn de G que disti de l'origen O menys o al màxim igual que els altres punts del contorn. Sigui h la distancia AO. Considerem el cercle de dues fulles que té en A un punt de bifurcació. El cercle de dues fulles es pot transformar en un altre d'una fulla. La funció que realitza aquesta transformació sigui f_1. La iteració del procés ens conduirà a f_2, f_3 etc.

Comencem per portar el punt de bifurcació a l'origen mitjançant

$$z=\frac{z'-h}{1-z'h}.$$

El cercle de radi h es transforma en altre cercle excèntric. La transformació

$$z'=z''^2$$

converteix el pla de les dues fulles en el d'una i aquest últim cercle en un recinte limitat per una branca de lemniscata. L'origen primitiu és ara un punt interior. Passant-lo a l'origen altra vegada mitjançant

$$z'' = \frac{z_1 + \sqrt{h}}{1 + z_1\sqrt{h}}$$

resulta la transformació

$$z = z_1 \frac{z_1 + c}{z_1 c + 1} \qquad (\gamma)$$

en la qual

$$c < \frac{2\sqrt{h}}{1+h} < 1.$$

Anem a demostrar que (γ) augmenta els radis vectors i quedarà així provada la propietat de les funcions f de contenir les transformades de G en llur interior cercles de radi creixent amb l'índex que els correspón. En efecte: posem

$$w = \frac{z}{z_1} = \frac{z_1 + c}{z_1 c + 1}.$$

Quan z, romàn a l'interior de C la funció w de z, romàn a C_w. Per tant, en tot cercle de radi $h < 1$,

$$|w| < 1$$

i pel lema de Schwarz, serà:

$$|z| < |z_1|$$

és a dir, si h_1 és el mínim valor de la distancia del contorn transformat de G per la funció z_1 de z, és

$$h < h_1$$

com es volía demostrar.

Les h van creixent i lim $h_n = 1$ per $n = \infty$. En efecte: una de les conseqüencies del lema de Schwarz deduides en la tercera conferencia, ens diu que, si $|z_1| < h_1$,

$$|w| \overline{\leq} \frac{c + h_1}{1 + h_1 c} < 1.$$

Per tant, dins del cercle de radi h_1

$$|z| \overline{\overline{<}} |z_1| \frac{c_1+h_1}{1+h_1c} \overline{\overline{<}} h_1 \frac{c+h_1}{1+h_1c}.$$

El valor mínim de $|z|$ és inferior a tot altre valor de $|z|$; per tant

$$h \overline{\overline{<}} h_1 \frac{c+h_1}{1+ch_1}.$$

I, en conseqüencia

$$1-h \overline{\overline{>}} \frac{1-h_1^2}{1+h_1c}$$

$$1-h_1 \overline{\overline{<}} (1-h) \frac{1+h_1c}{1+h_1}.$$

Aquestes fórmules es refereixen al pas de G a G_1. Posant h_{n-1} en lloc de h i h_n en lloc de h_1, tindrem

$$1-h_n \overline{\overline{<}} (1-h_{n-1}) \frac{1+h_nc}{1+h_n}.$$

El tencat del segòn membre disminueix a l'augmentar h i serà sempre menor que $\frac{1+hc}{1+h}=\tau$ essent τ un número fix. Per tant

$$1-h_n < (1-h_{n-1})\tau < (1-h)\tau^n.$$

Com que $\tau<1$ al crèixer n indefinidament τ^n tendeix a zero i per tant

$$\lim h_n = 1 \quad \text{per a} \quad n \longrightarrow \infty$$

que és lo que's volía demostrar.

La convergencia és massa lenta per a les aplicacions numèriques o gràfiques, recorrent-se per a aquest objecte a altres mètodes, com el ja indicat de Bieberbach.

NOTA 1.ª

Heus-aquí les nocions de conjunts de punts, estrictament necessaries per a la intel·ligencia de ço que precedeix i segueix.

Un punt $\underline{\mathrm{A}}$ del conjunt $\overline{\mathrm{U}}$ s'anomena *isolat*, si hi ha un entorn de $\underline{\mathrm{A}}$ que no conté altres punts de $\overline{\mathrm{U}}$. Es diu que A és ***punt d'acumulació*** del conjunt $\overline{\mathrm{U}}$, si tot entorn de A conté infinits punts de $\overline{\mathrm{U}}$. Es diu que A és ***punt interior***, si hi ha un entorn de A format per punts de $\overline{\mathrm{U}}$; s'anomena ***exterior*** si hi ha un entorn de A tal que cap dels seus punts pertany a $\overline{\mathrm{U}}$; s'anomena punt ***frontera*** o de ***contorn***, si $\underline{w}$ no és interior ni exterior a $\overline{\mathrm{U}}$, és a dir, si tot entorn de A contenen punts de $\overline{\mathrm{U}}$ i punts que no pertanyen a $\overline{\mathrm{U}}$.

Un conjunt que conté tots els seus punts d'acumulació s'anomena *tancat*. Un recinte al qual s'afegeixen els seus punts de contorn és, doncs, un conjunt tancat.

NOTA 2.ª

Teorema de Borel

Donat un conjunt acotat i tancat *cada un dels punts del qual té assignat arbitrariament un entorn, és possible d'entre aquests infinits cercles elegir-ne un nombre* finit *de manera que cobreixin tot el conjunt.*

Per ésser acotat el recinte, està contingut dins d'un quadrat de costat a; subdividit aquest en quatre quadrats iguals, si el teorema no fos cert per al conjunt total, no ho fóra per a cada un d'aquests conjunts parcials. Subdividit aquest quadrat en quatre d'iguals, per a un almenys dels quatre conjunts parcials no será cert el teorema. Seguint així, aquests quadrats de costats,

$$a, \quad \frac{a}{2}, \quad \frac{a}{2^2}, \ldots \frac{a}{2^n} \ldots .$$

defineixen un punt límit P, el cual ès d'acumulació del conjunt i hi pertany per tant; té, doncs, un cert entorn assignat π i prenent n gran a bastament el quadrat n^{sim} està contingut en π; per al conjunt parcial contingut en aquest quadrat és cert el teorema, puix l'entorn π és prou per a cobrir-lo. Arribem, doncs, a una contradicció evident.

Fem aplicació freqüent d'aquest teorema per a generalisar propietats demostrades *en petit*, fent-les aplicables a recintes qualsevulga.

CONFERENCIA VI

PRINCIPI DE SIMETRÍA DE SCHWARZ. MÈTODE ALTERNAT. REPRESENTACIÓ CONFORME DE RECINTES LIMITATS PER CURVES ANALÍTIQUES

1. Enunciat i demostració del principi de Simetría

Sigui H_z un recinte simètric respecte de l'eix de les x, essent un segment d'aquest que conté O interior a H_z. Sigui $w=f(z)$ la funció que transforma l'interior de H_z en C_w essent $f(o)=0$ i $f'(o)=a>o$. Establim ara la correspondencia següent: si z i w són dos punts homòlegs en l'anterior, al punt $\bar{z}$ simètric del z respectes de l'eix x, li assignem el punt $\bar{w}$ simètric del w. Aquesta nova correspondencia entre H_z i C_w és evidentment continua, biunívoca i conforme. En ella l'origen es correspòn i la dilatació en ell es com en la primera correspondencia donada. Ara doncs, com que dues representacions conformes no poden existir d'aquesta manera, les dues són idèntiques. Es a dir, si $w=f(z)$ necessariament $\bar{w}=f(\bar{z})$. Aquesta conseqüencia es tradueix del següent modo:

A dos punts simètrics respecte de l'eix x *corresponen en la representació conforme damunt del cercle punts igualment simètrics respecte de l'eix real.* En particular, es corresponen els segments d'aquests eixos que contenen els recintes. Per tant, a la meitat superior de H_z correspòn un dels dos semicercles, i l'altre a la meitat inferior biunívocament i continuament.

D'aquestes consideracions es dedueix que els coeficients del desenrotllament de la funció w en serie de potencies de z són necessariament reals, puix no d'altra manera a valors reals de z correspondrían sempre valors reals de w.

Aquest principi de simetría facilita i simplifica en alguns casos l'aproximació de polinomis de què s'ha fet esment a l'exposar el teorema de Bieberbach. En efecte: si hi ha dos eixos de simetría, v. g., el de les x i el de les y, hi ha centre de simetría, de manera que, en canviar el signo de z ha de canviar el de w; per tant, els coeficients de totes les potencies parells són nuls. Si el nombre d'eixos de de simetría arriba a 4, per a $z=zi$, $w=wi$; els desenrotllaments, doncs, contenen sols potencies de la forma $4n+1$ essent $n=0, 1, 2 \ldots$; etc.

2. Reflexió respecte d'un segment

Sigui g un recinte en el contorn del qual es presenta el segment rectilini AB (fig. 12), i de tal manera que tot el

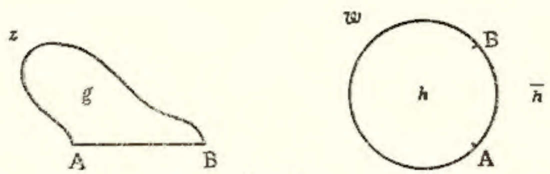

Fig. 12

recinte estigui a un costat de la recta definida per aquest segment. Sigui $w=f(z)$ la funció que transformi l'interior de g en C_w.

Teorema 1.^{er} *La funció* f *és definida i és regular en el segment* AB *(excloent els extrems) i transforma* AB *en un arc* AB *de* C_w *d'una manera continua i conforme al llarg del segment.*

Teorema 2.^{ón} *Aquesta funció es pot prolongar analíticament a través de dit segment rectilini de manera que* $\bar{g}$ *simètric de* g *respecte d'ell* (suposat en l'eix x) *tingui per transformat* $\bar{h}_w$ *essent aquest exterior a* C_w, *i de tal manera, que a punts simètrics respecte de l'eix* x *en el pla de les* z *corresponen punts simétrics respecte de l'arc* AB (anomenant així els conjugats respecte de C_w).

Per a demostrar uns teoremes tan importants suposem primer que g és un semicercle. La funció que el transforma en C_w és una funció definida en tot el pla de la variable i particularment en el semicercle $\bar{g}$ (V. 2.ª Conf.). La naturalesa d'aquesta transformació es tal, que, aplicada a $\bar{g}$, dóna efectivament per transformat l'espai $\bar{h}$ exterior a C_w i tot parell de punts simètrics l'un en g i l'altre en $\bar{g}$ té per corresponent un parell de punts conjugats en C_w. Es passava, en efecte, del semicercle a C_w, 1.^{er} per la transformació per radis vectors recíprocs $z'=\frac{2}{z}$; el quadrant que s'obté d'aquesta manera és simètric del quadrant que dóna el semicercle simètric del primer. Del quadrant es passa al semiplà per la transformació $z''=z'^2$ i aquesta transformació conserva la simetría dels semiplans transformats dels quadrants anteriors. Finalment, del semiplà es passa al cercle per una transformació linial que transforma punts conjugats en punts conjugats.

Resulten així demostrats als dos teoremes per al semicercle.

Per a arribar a la demostració general, suposem que $w=f(z)$ és la funció que transforma el recinte g donat i de les condicions esmentades, en C_w. Formi's (fig. 13) el recinte $G=g+\overline{g}$ i sigui $z=\varphi(z')$ la funció que transforma G en C_z de manera que $\varphi(o)=o$ i $\varphi'(o)=a>o$ ($\underline{a}$ real). Aquesta funció φ, en virtut del principi de simetría, transforma g en el semicercle superior g' i $\overline{g}$ en l'inferior $\overline{g}'$. Per conseqüent, la funció $w=f(\varphi(z'))=F(z')$ transforma g' en h,

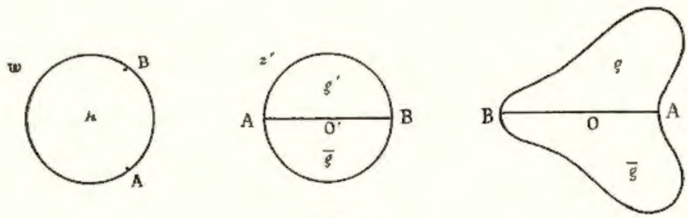

Fig. 13

recinte interior a C_w. Aquesta funció F que representa conforme un semicercle sobre C_w és regular en $\overline{g}'$ el recinte del qual queda transformat en $\overline{h}$, exterior a C_w. Al segment A'B' correspòn conforme l'arc AB. Per altra part, en la funció $z=\varphi(z')$, a $\overline{g}$ correspòn $\overline{g}'$, i a $\overline{g}$ la funció F fa correspondre $\overline{h}$; finalment a punts simètrics en g i $\overline{g}$ corresponen punts simètrics en g' i $\overline{g}'$ i a aquests punts conjugats respecte de AB en el pla de la w com se volía demostrar.

En els extrems A i B del segment, la representació no serà en general conforme.

3. Reflexió respecte d'una curva analítica

En una curva analítica, a valors reals d'un paràmetre t corresponen valors reals de x i y en les funcions

$$\left.\begin{aligned} x&=\varphi(t)=a_o+a_1t+a_2t^2+\dots\\ y&=\psi(t)=b_o+b_1t+b_2t^2+\dots\end{aligned}\right\}\quad(\alpha)$$

quan els coeficients són reals. Aquests valors són finits si t és inferior al menor dels radis de convergencia de les series anteriors. Suposem la curva analítica definida com com s'acaba de dir i admetem que, per a una certa regió de l'eix real en el pla t, es té,

$$\varphi'(t) \neq o, \qquad \psi'(t) \neq o; \qquad (\beta)$$

però com que la curva la definim en el pla de la variable $z = x + i\,y$, en lloc de (α) podem escriure:

$$z = (a_o + ib_o) + (a_1 + ib_1)t + (a_2 + ib_2)t^2 + \ldots \quad (a_o + ib_o \neq o)$$

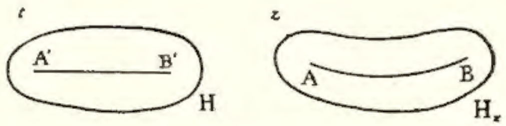

Fig. 14

Si per a tots els punts del segment rectilini AB de l'eix x la curva és perfectament definida i en ells $\frac{dz}{dt} \neq$o, segons (β), sempre podrem imaginar un recinte al voltant de A'B' en què $\frac{dz}{dt} \neq$o. En el pla z els seus corresponents ompliràn una àrea d'una fulla que contindrà la curva analítica AB corresponent al segment A'B' fig. 14. Aquests recintes seràn anomenats H_z i H_t. S'anomenen *simètrics respecte de la curva* AB dos punts transformats d'altres dos simètrics respecte de A'B' i continguts en H_t.

S'anomena *arc lliure* AB de curva analítica, tot arc al qual pot associar-se un altre tan pròxim d'aquell com se vulgui de manera que l'àrea compresa entre ells pertany a H_z. Donat un recinte $G_z \prec H_z$ i del qual l'arc AB forma part del contorn, el seu transformat $G_t \prec H_t$ i té A'B' en son contorn. Si G_t es representa conforme en C_w, la funció que transforma G_z en G_w és regular i transforma AB en un arc de cercle AB en el plà w; els punts simètrics respecte de l'arc de curva analítica seràn evidentment punts conjugats respecte de AB en el plà w.

Suposem per un moment que la curva AB fos un arc de cercle. La funció $z=\varphi(t)$ és aleshores linial i H_t i H_z s'allarguen fins a incloure tot el pla respectiu. Per tant

En la representació conforme de l'interior d'un recinte damunt l'interior d'un cercle si aquell hi té un arc lliure circular la funció que efectúa la transformació és analítica i regular, transformant-se per ella aquell arc en un arc de circumferencia d'una manera continua i uniforme en tots els seus punts, fòra dels extrems.

Passem ara al cas general. Sigui H_z un recinte qualsevol, i $z=\varphi(t)$ la funció que rectifica l'arc AB de curva analítica (fig. 15). Prenem damunt A′B′ en el pla de la variable t un petit segment de cercle. La transformada

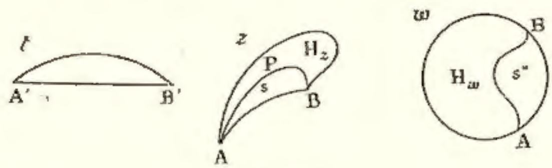

Fig. 15

d'aquesta àrea en el pla z serà una àrea tal com APB suposant sempre que l'arc AB de la curva donada és lliure.

Si $w=f(t)$ és la funció que transforma H_z en l'interior de C_w, a l'àrea APB correspondrà una àrea s'' interior a C_w. Anomenem s' l'àrea del segment en el pla de les t, s l'àrea corresponent en z. Les dues àrees s' i s'' es corresponen conformement com en el cas anterior. La funció que dona la correspondencia és regular, continua i conforme en el segment A'B'. Per tant, la representació de H_z sobre H_w és continua i conforme en AB al qual arc fa correspondre l'arc de circumferencia AB en el pla w. Es pot enunciar, per tant, el teorema següent:

La representació conforme damunt del cercle d'un recinte el contorn del qual són arcs lliures de curves analítiques és regular i conforme en dits arcs (fòra dels extrems), *i a tals arcs corresponen arcs de la circumferencia que limita el cercle.*

4. Mètode alternat de Schwarz

Té per objecte obtenir la representació conforme d'un recinte que resulta de la superposició d'altres dos tals com $\alpha\gamma$ i $\beta\delta$ que tenen comú la part $\beta\gamma$ (fig. 16). Se suposa també que l'angle dels contorns allí on es tallen, no és zero. Vejam com, sabent realisar la representació conforme

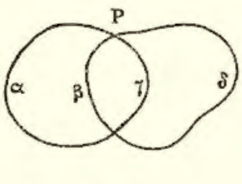

Fig. 16

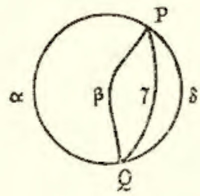

Fig. 17

de cada un dels recintes sobre C_w es pot obtenir la del recinte ocupat per tots dos. En aquesta representació, les linies interiors β i γ seràn interiors a C_w com indica la figura 17. Resulta més avinent raonar sobre semiplans en lloc de cercles. La figura resultant serà doncs com la 18. Les representacions donades correspondràn a les figures 19 i 20 per exemple. Prenem aquestes darreres i anem a passar mitjançant certes transformacions a la 18.

Tracem en la figura 20 una recta ε' que formi amb β' un angle $\varphi = \frac{\pi}{2^n}$ el qual pot ésser tan petit com se vulgui si n és gran a bastament. A la recta ε' correspon-

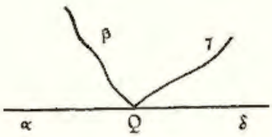

Fig. 18

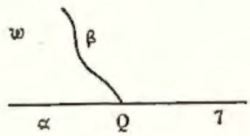

Fig. 19

drà en el pla w de la fig. 19 una certa curva ε fig. 21. Si n és suficient, ε' caurà dins de la porció de pla compresa entre β' i γ'. Per lo tant, ε estarà sencera en el troç de pla comprès entre β i γ, per la correspondencia

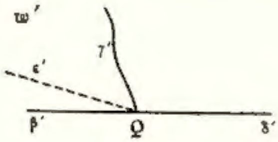

Fig. 20

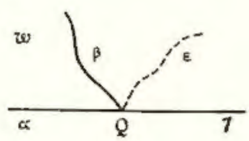

Fig. 21

conforme entre aquestes regions transformades ambdúes conformes de l'espai $\beta\gamma$ comú als recintes donats en el pla z. Transformem ara conformement l'espai entre α i ε en un semiplà i tracem el simètric $\overline{\beta}$ (fig. 22) de β respecte de ε. Sigui w_1 la nova funció. El recinte entre β i ε en el pla w_1 té per corresponent en el pla w' de la figura 20 el recinte entre β' i ε'. Al comprès entre ε i $\overline{\beta}$ correspondrà en w' un recinte simètric respecte de ε' del recinte que comprenen β' i ε'. Representant sobre el semiplà el recinte entre α i $\overline{\beta}$, prenent el simètric de ε sobre el límit del semiplà i el seu corresponent en el pla w' que serà simètric respecte de la transformada de $\overline{\beta}$ i així successivament s'arribarà a omplir tot el semiplà w'. Sigui w_n el pla que dóna aquesta transformació (fig. 23); transformant el

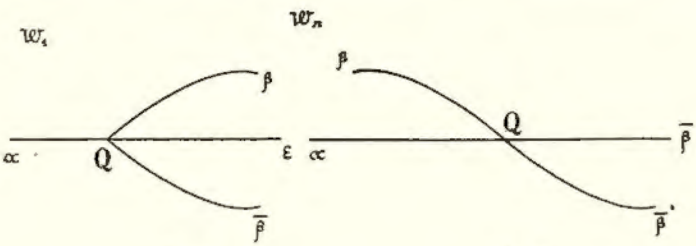

Fig. 22 Fig. 23

recinte $\alpha\overline{\beta}'$ en semiplà, s'obté la figura desitjada, puix el recinte entre la transformada de β i la part de l'eix oposada a α té per corresponent en el pla w' el recinte comprès entre β' i δ'.

Aquest mètode importantíssim permet la representació conforme d'un recinte qualsevol limitat per curves analítiques, encara que sigui de diverses fulles, puix cal només cobrir-lo per recintes dels quals se sàpiga fer la representació conforme a guisa de teules en una coberta. Així, per exemple, sigui un recinte limitat per tres arcs lliures de curva analítica. Començarem per definir en els contorns arcs corresponents a segments de cercle en els plans de les rectificants *t*. Després podrem acudir a sectors i cercles d'una o de diverses fulles per a tapar el recinte donat. Que el nombre de recintes elementals utilisats pot pendre's finit, resulta del teorema de Borel (Vegis son enunciat i demostració en la nota segona amb que acaba la conferencia 5.ª).

CONFERENCIA VII

APLICACIÓ DE LA REPRESENTACIÓ CONFORME AL PROBLEMA DE DIRICHLET

1. Funcions harmòniques

Del teorema II (Conf. 1.ª § 5) resulta que si

$$f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$$

és analítica, admeten derivades parcials successives les funcions reals u i v. Derivant les equacions de Cauchy-Riemann i sumant, resulta:

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

$$\Delta v=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0 .$$

Es a dir:

I. *La part real* $\Re f(z)$ *i la part imaginaria* $\Im f(z)$ *d'una funció analítica* $f(z)$ *són funcions harmòniques, és a dir, satisfan l'equació de Laplace.*

Donada una funció harmònica qualsevol u en un recinte simplement conex S, si es troba la funció

$$v=\int_{ab}^{xy}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy\right)+C$$

qualsevol que sigui el camí d'integració entre el punt fixe (ab) i el punt variable (xy) del recinte, és $u+iv$ una funció analítica de z en el recinte S.

En efecte: cal observar només que aquesta funció v junt amb la u satisfà les equacions de Cauchy-Riemann. Per tant:

II. *Tota funció harmònica u en un recinte simplement conex* S *determina unívocament* (fòra d'una constant additiva) *una altra funció harmònica v anomenada* CONJUGADA *de la u, que amb ella compòn la funció analítica* $u+iv$.

Si apliquem el teorema de Cauchy (Conf. I.ª § 4) a la funció analítica

$$f(z)=u(x,\ y)+iv(x,\ y)$$

en el cercle de centre O i radi r, posant $t=re^{\varphi i}$, obtenim com a valor en l'origen:

$$u(o,\ o)+iv(o,\ o)=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(t)\,dt}{t}=\frac{1}{2\pi}\int_c f(t)\,dt$$

i igualant les parts reals,

$$u(o,\ o)=\frac{1}{2\pi}\int_c \mathrm{M}\,d\varphi$$

anomenant M els valors de u en el contorn. Per consegüent

III. *Coneguts els valors d'una funció harmònica en els punts d'una circumferencia, el seu valor en el centre és la llur mitjana aritmètica.* (Teorema de Gauss.)

D'aquí resulta, igual que per a les funcions analítiques:

IV. *Si una funció harmònica en un recinte no és constant, assoleix son valor màxim i mínim solament en punts del contorn.*

2. El problema de Dirichlet

El teorema III planteja aquest problema capital: poden donar-se *arbitrariament* (sense altre condició que la continuitat) els valors d'una funció harmònica en el contorn d'un recinte? En cas afirmatiu, quantes funcions harmòniques existeixen que prenguin en el contorn els valors prefixats? (*)

Que la solució, si existeix, és única, resulta del teorema IV, puix si hi hagués dues funcions harmòniques u_1, u_2 amb els mateixos valors en el contorn, la funció harmònica $u_1 - u_2$ sería nul·la en aquest contorn; i essent zero el seu màxim i el seu mínim, fóra $u_1 - u_2 \equiv 0$ en tot el recinte, o sigui $u_1 \equiv u_2$. Cal, doncs, només trobar una funció $u(x,y)$ que prengui en el contorn els valors prefixats i satisfaci l'equació de Laplace $\Delta u(x,y) = 0$. Aquesta serà la solució del problema.

Aquesta qüestió d'existencia cal només demostrar-la per al cercle, puix qualsevol altre recinte simplement conex pot representar-se conformement damunt d'ell, en virtut del teorema de Riemann, i l'equació $\Delta u = 0$ és invariant respecte de les representacions conformes, com anem a demostrar.

Sigui R un recinte en el pla xy i R$'$ el seu transformat conforme en el pla ξ, η per una certa funció $\zeta = f(z)$. Si $u\ (x,\ y)$ és una funció harmònica en el recinte R, i traslladem els valors del pla xy al $\xi\eta$, de manera que assignem el mateix valor als punts corresponents, és u funció de ξ, η. Demostrem que si en el recinte R és u harmònica, també ho és en el R$'$. En efecte:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} \qquad \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta}$$

i recordant que per ésser R$'$ transformat conforme de R, és

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial y}{\partial \eta} \qquad \frac{\partial x}{\partial \eta} = -\frac{\partial y}{\partial \xi}$$

(*) La qüestió és encara més interessant per ésser la contesta negativa per a les funcions analítiques, malgrat de l'analogía que presenta amb aquestes.

resulta

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2\right]$$

i com aquest últim factor és distint de zero per ésser $f'(z)\neq 0$, resulten equivalents les dues condicions

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad \text{i} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=0$$

3. Resolució del problema de Dirichlet per al cercle

El teorema del valor mitjà de Gauss ens dóna directament el valor de la funció buscada en el centre del cercle. Per a trobar el valor de la funció en altre punt

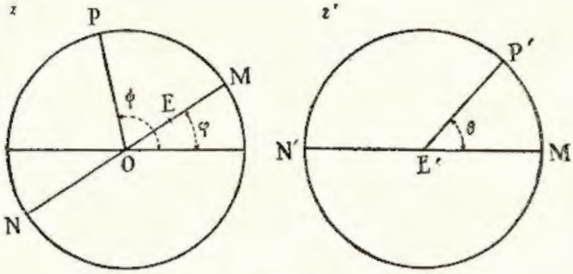

Fig. 24

procedirem a una transformació conforme del cercle donat en altre del qual el punt donat sigui el nou centre. Cal sols després traslladar la funció obtinguda per l'aplicació directa del teorema de la mitjana al nou cercle. En aquesta idea de Bôcher apoyem la següent demostració original, que sols exigeix recursos molt elementals. Sigui E el punt de coordenades polars r i φ (fig. 24). El cercle transformat tindrà per centre E' transformat de E. Sigui N'M' la recta que correspòn al diàmetre NM que passa per E, la qual serà el nou eix de quantitats reals. Un punt qualsevol P del contorn tindrà per transformat per exemple P′. Anomenant θ l'angle P′E′M′ es tindrà

$$U_{E'} = \frac{1}{2\pi}\int U_{P'} d\theta.$$

En aquesta fórmula la majúscula U indica valor de contorn.

La funció linial que transforma $C_{z'}$ en C_z, transforma E′P′ en una circumferencia que passa pel punt E, per son

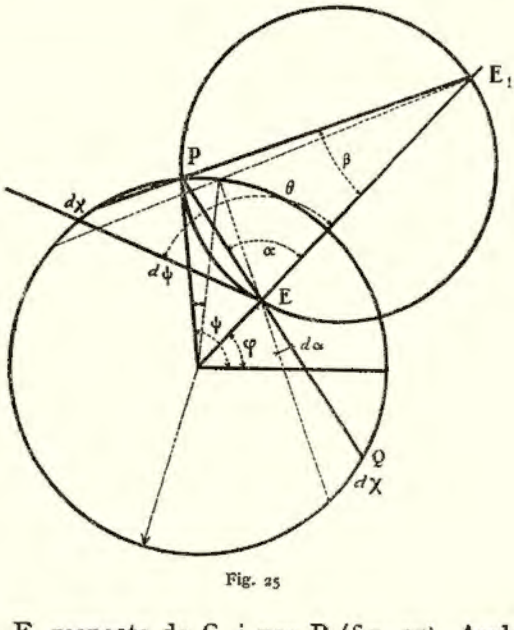

Fig. 25

conjugat E_1 respecte de C_z i per P (fig. 25). Amb les notacions de aquesta figura i recordant que la transformació conforme no altera els angles, es té

$$\alpha + \beta = \theta$$

$$d\alpha = \frac{d\chi + d\psi}{2}, \qquad d\beta = \frac{d\chi - d\psi}{2}.$$

Per tant

$$d\theta = d\chi$$

I per consegüent, si existeix la funció buscada, aquesta és necessariament:

$$u_E = \frac{1}{2\pi} \int U_P d\chi \qquad \text{(Schwarz)}$$

estesa la integral al cercle donat.

Si en lloc de $d\chi$ introduim $d\psi$, que és l'element natural d'arc en el cercle donat, la fórmula anterior, que, segons veurem, resol el problema, es converteix en la de Poisson.

En efecte, es fàcil veure que si $PE = l$, $QE = l'$,

$$\frac{d\chi}{d\psi} = \frac{l'}{l} = \frac{ll'}{l^2} = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\psi - \varphi)};$$

per tant, i suposant que sigui R el radi del cercle donat, resulta la fórmula coneguda

$$u_E = \frac{1}{2\pi} \int U_P \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2r R \cos(\psi - \varphi)} \, d\psi$$

Ara manca sols demostrar que aquesta solució convé al problema per ésser harmònica i pendre els valors prefixats en el contorn. En efecte: la funció es pot considerar com la part real de la funció complexa

$$\frac{p + z}{p - z}$$

en que p representa P i z representa E. Per lo tant, satisfà l'equació de Laplace ja que,

$$\Delta u = \frac{1}{2\pi} \int U \Delta \left[\Re \left(\frac{p + z}{p - z} \right) \right] d\psi = 0 .$$

Vejam ara a quins valors tendeix u quan ens atancem a la circumferencia contorn. Suposem que E es troba prop d'ella. Traci's fig. 26 la corda perpendicular al radi vector, la qual divideix la circumferencia en dues regions χ_1 i χ_2.

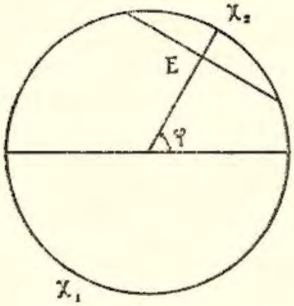

Fig. 26

Aquesta es fa zero en el límit quan E arriba a la circumferencia. La segona abraça aleshores tot el cercle. Es evident que

$$u_E = \frac{1}{2\pi}\int_{\chi_1} U_2 d\chi_1 + \frac{1}{2\pi}\int_{\chi_2} U_1 d\chi_2$$

essent U_2 i U_1 els valors de U en χ_2 i χ_1 respectivament. Sigui M el màxim de $|U|$. Evidentment:

$$\left|\int_{\chi_2} M_1 d\chi_1\right| \overline{\overline{<}} \int_{\chi_2} M d\chi_2 = M\chi_2$$

que té per límit zero. Queda designant per U_E el valor límit de U_2

$$\lim u_E = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} \lim U_2 d\chi = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} U_E d\chi = U_E.$$

S'ha suposat que la successió de valors en el contorn és continua. Si hi hagués un punt en que no ocorregués, el valor que per a ell dóna la solució anterior, no és únic i depèn de la direcció segons la qual ens atancem al valor en el contorn. No entrarem en detalls respecte d'aquest cas.

CONFERENCIA VIII

TEOREMA GENERAL

DE LA REPRESENTACIÓ CONFORME

I. Classificació general dels recintes

Els recintes simplement conexos de diverses o infinites fulles es classifiquen en dos grups:

a) Recintes *tancats*, això és, recintes d'un nombre infinit de fulles indefinides, que contenen el punt de l'infinit, els quals es poden deformar aplicant-los damunt l'esfera completa. Una retrosecció qualsevol els divideix en dos recintes parcials. Els recintes d'aquest tipus són les superficies de Riemann de les funcions algèbriques de gènere zero.

b) Recintes *oberts* de diverses o inflnites fulles, amb nombre finit o infinit de punts de ramificació, d'ordres finits o infinits; aplicables per deformació damunt l'esfera puntejada o damunt un casquet. Un exemple de tals recintes l'ofereix la superficie de Riemann de la funció $log\ z$, exclosos els punts o i ∞.

La possibilitat de la representació conforme damunt l'esfera completa, o damunt el pla complet, d'un recinte tancat, s'obté fàcilment pel mètode alternat, o també suprimint un punt del recinte, amb la qual cosa es transforma en recinte obert; i efectuada la representació de aquest damunt del pla incomplet (o sigui l'esfera puntejada) com veurem més endavant, la funció obtinguda és també analítica i regular en el punt exclòs, en virtut del teorema de Riemann (*), i efectúa, per tant, la representació del recinte complet damunt del pla complet.

Ens caldrà només, doncs, considerar els recintes oberts, únics en que el problema presenta dificultat.

2. Successions convergents de recintes

Donat un recinte obert G simplement conex, i un punt interior O, és possible construir una successió indefinida de recintes simplement convexos G_1, G_2, G_3..., limitats per curves analítiques, que convergeixin cap a dit recinte G. En termes més precisos, aquests recintes han de complir les condicions següents:

1.ª Tots estàn continguts en G i contenen O en llur interior.

2.ª G_n està contingut en G_{n+1}, o sigui $G_n \prec G_{n+1}$.

3.ª Tot punt de G está contingut en G_n des d'un valor de n en endavant.

Aquestes tres condicions seràn expressades abreujadament escrivint:

$$\lim_{n \to \infty} G_n = G.$$

Un mètode senzill per a construir aquesta successió és el següent, de Koebe: Prenem un quadrat de costat a i centre O contingut en G; i construim tots els quadrats adjacents de costat $\frac{a}{2}$, continguts en G, i que compleixin

(*) *Teorema de Riemann.* Si $f(z)$ és analítica en un entorn del punt $z=a$, exceptat el mateix punt a, i es conserva finita en tal recinte, té $f(z)$ un límit finit α per a $z \to a$. Si s'assigna aquest valor al punt a, posant $f(a) = \alpha$, la funció així completada és analítica en el punt z. Per la demostració vegis a Osgood, pàg. 310. *Lehrbuch der Funktionentheorie*, Leipzig, 1912.

la condició que es pugui unir qualsevol punt de O amb qualsevol punt de la xarxa construida per mitjà d'una linia de longitut no superior a a.

Subdividits els quadrats en quatre parts, construim els quadrats adjacents de costat $\frac{a}{4}$, continguts en G, els punts dels quals siguin accessibles desde A per camins de longitut no superior a $2a$. Seguint així construim una xarxa de quadrats de costats $\frac{a}{2^n}$, continguts en G, els punts dels quals són tots accessibles des de O per camins de longitut $\overline{\gtrless} na$.

Si en la construcció de quadrats successius evitem cobrir els punts de ramificacions, el resultat G'_n obtingut no serà, en general, simplement conex, però afegint-li els recintes parcials limitats per les linies trencades interiors que contingui, obtenim un recinte simplement conex $G_n \succ G'_n$.

Els recintes G_n compleixen a primera vista les condicions 1.ª i 2.ª. Ultra això, qualsevol punt A de G pot ésser unit amb O per una trencada (per la conexió de G) i sense altra cosa que pendre n prou gran perquè na sigui major que la longitut d'aquesta, i $\frac{a}{2^n}$ petit a bastament, queda A contingut en G'_n i per tant en G_n.

3. Cas A. — La successió de radis és convergent

1.ª *part. Limitació.*

Sigui g un recinte contornejat qualsevol interior a G. Cada punt de g està en G_n d'un cert valor de n en endavant; a cada punt z_0 correspòn un valor n_0 de l'índex que compleix aquesta condició, i aplicant el teorema de Borel obtenim un valor únic ν tal que tot el recinte g està contingut en G_ν, $G_{\nu+1}$ . . . .

Siguin $f_1(z)$, $f_2(z)$, ... $f_n(z)$ . . . les funcions que efectúen la representació conforme de G_1, G_2 . . . . G_n . . . . damunt de C_w corresponent-se els origens i les direccions reals. La funció $f_{n+p}(z)$ transforma $G_n \prec G_{n+p}$ en un recinte $G'_n \prec C_w$; i la funció $f_n(z)$ transforma aquest mateix G_n en C_w; serà, doncs, pel lema de Schwarz en tot el recinte G_n:

$$|f_{n+p}(z)| < |f_n(z)|$$

La funció $f_\nu(z)$ transforma g en cert recinte interior a C_w; existeix, doncs, un número λ tal que en tots els punts de g serà

$$|f_\nu(z)| < \lambda < 1$$

i per tant:

$$|f_n(z)| < \lambda < 1$$

per a tots els punts de g, ip er a tots els índexs $n \overline{\gtrless} \nu$.

2.ª *part. Convergencia.*

La funció $f_{n+p}(z)$ transforma G_{n+p} en C_w i $G_n \prec G_{n+p}$ en $G'_n \prec C_w$; entre els radis d'aquests quatre recintes en el punt O existirà (Conf. II § 1, ap. 2) la relació

$$\frac{\rho'}{1} = \frac{\rho_n}{\rho_{n+p}}$$

i com que, en virtut de lo dit en el § 3 de la Conf. IV, anomenant h_n la distancia de O al contorn de G'_n és

$$\rho'_n < \frac{2\sqrt{h_n}}{1+h_n},$$

tenim:

$$\frac{\rho_n}{\rho_{n+p}} < \frac{2\sqrt{h_n}}{1+h_n} < 1$$

i essent

$$\lim_{n \gg \infty} \rho_n = \lim_{n \gg \infty} \rho_{n+p} = \rho,$$

resulta:

$$\lim_{n \gg \infty} h_n = 1;$$

prenent, doncs, n gran a bastament serà

$$\lambda < \sqrt{\lambda} \overline{\leqq} h_n < 1.$$

Com que les funcions $f_n(z)$, $f_{n+p}(z)$ transformen G^n en C_w i G'_n respectivament, tenim entre aquests una representació conforme i aplicada a ells la limitació de Carathéodory per a $\tau = \sqrt{\lambda}$ serà $h_n \tau \overline{\gtrless} \lambda$; per tant

$$|f_{n+p}(z) - f_n(z)| < \varepsilon$$

per a $n \overline{\gtrless} N$ i p qualsevol en tot el recinte g. La successió, doncs, convergeix uniformement en tot recinte constant interior a G i pel teorema de Weierstrass (Conf. I § 6) defineix una funció límit $f(z)$ analitica en tot punt de G.

Observi's que per ésser $f'_n(o) = \frac{1}{\rho_n}$ és $f'(o) = \frac{1}{\rho} \neq o$, i per tant, $f(z)$ no és una constant.

3.ª *part. Representació.*

Tot punt z_o de G, queda comprès en G_n des d'un cert valor de n; i com que les funcions $f_n(z)$ són uniformes, defineix $f(z_o)$ un punt únic. Per ésser $|f_n(z_o)| < \lambda < 1$ resulten sempre punts interiors a C_w.

Si w_o és un punt qualsevol interior a C_w, per ésser lim $h_n = 1$, des d'un cert valer $n = v$ serà

$$|w_o| < h_n < 1 \qquad n \overline{\gtrless} \nu$$

qualsevol que sigui h; per tant, l'homòleg de w_o en la transformació de $G_{\nu+p}$ damunt G_w efectuada per $f_{\nu+p}(\tau)$, està dins de G_ν, i l'equació

$$f_n(z)=w_o, \qquad n\overline{\overline{>}}\nu$$

té una arrel z_o dins de G_ν. Essent aquest un recinte contornejat interior a G es pot aplicar el teorema de Hurwitz (Conf. V § 4), i l'equació $f(z)=w_o$ tindrà també una sola arrel dins de G_ν. Hi ha, doncs, un homòleg z_o de w_o en G, i aquest és únic, puix si en tingués un altre z_1, prenent v gran a bastament quedaríen ambdós dins d'ell, contra la conclusió anterior.

En resum: la funció $f(z)$ efectúa la representació biunívoca, continua i conforme de l'interior de G damunt l'interior de C_w.

4. Nou teorema de limitació

Hem resolt el cas A basant-nos en el teorema de limitació de Carathéodory. Per a escometre per un mètode anàleg el cas B en què lim $\rho_n=\infty$ per $n\longrightarrow\infty$, anem a establir un nou teorema d'una mena semblant al de Carathéodory.

Donat un recinte qualsevol G_z simplement conex d'una fulla, que conté en son interior el cercle $|z|\overline{\overline{<}}H$ de centre O i radi H, si $w=f(z)$ és una funció qualsevol analítica i regular en G_z, que compleix les úniques condicions:

$$f(o)=o \qquad |f'(o)|=1\,,$$

es verifica:

1.^er^ *Fixat un cercle $|z|\overline{\overline{<}}h<H$ interior a H, per a tots els valors de z continguts en ell és:*

$$|w-z|<m$$

essent m *un número positiu que sols depèn de h i H però no de* f(z).

2.$^{\text{ón}}$ *Fixat h, és* $\lim m = 0$, per a $H \to \infty$.

Pel teorema de Taylor-Cauchy (Conf. 1.ª) és:

$$w = z + z^2 P$$

estant P expressat en tot punt del cercle $C_{\varkappa H}$ ($\varkappa < 1$) per la integral:

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varkappa H} \frac{f(t)\,dt}{t^2 (t - z)}$$

presa al llarg de la circumferencia $\varkappa H$ en sentit positiu. Però en aquesta circumferencia és: $|t| = \varkappa H$, i en virtut del teorema III de Koebe (Conf. 4.ª § 4) és:

$$|f(t)| \leqq KH.$$

Si considerem, doncs, el valors de P solament en el cercle C_h, en el qual és:

$$|z| \leqq h, \qquad |t - z| \geqq \varkappa H - h,$$

tenim:

$$|P| \leqq \frac{1}{2\pi} \int \frac{|f(t)|\,|dt|}{|t|^2\,|t - z|} \leqq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{KH}{\varkappa^2 H^2 \cdot (\varkappa H - h)} \int_{\varkappa H} |dt| = \frac{K}{\varkappa(\varkappa H - h)}$$

per tant, en tot el cercle C_h és:

$$|w - z| = |z|^2 |P| \leqq \frac{Kh^2}{\varkappa(\varkappa H - h)}.$$

Qualsevol que siguin $h < H$ es pot trobar el nombre fix $\varkappa < 1$ sense cap més condició que la $h < \varkappa H < H$ i la limitació anterior es verifica qualsevol que sigui $f(z)$ sense altra condició que la $f(o) = o$, $f'(o) = 1$.

Fixat h, si H creix indefinidament, conservant-se fixos $\varkappa$ i K resulta:

$$|w - z| < \varepsilon$$

de cert valor de H en endavant, essent ε tant petit com se vulgui.

BIBLIOGRAFÍA (*)

Llibres

H. A. Schwarz. — *Gesammelte Abhandlungen*, v. 1.^{er}, Berlín.

W. F. Osgood. — *Lehrbuch der Funktionentheorie*, 2.ª ed. v. 1.^{er}, Leipz g, 1912.

L. Lewent. — *Konforme Abbildung*, Berlín, 1912.

Estudy.—*Konforme Abbildung einfach-zusammenhängender Bereiche*, Berlín, 1913.

L. Bieberbach. — *Einführung in die konforme Abbildung*, Berlín-Leipzig, 1915. (**)

(*) La bibliografía completa (Memories) es podrá veure en una extensa ressenya de la teoría de la representació conforme que publicarem aviat.

(**) Publicat després de les nostres conferencies, no ha arribat el llibre a les nostres mans.

INSTITUT D'ESTUDIS CATALANS

PALAU DE LA DIPUTACIO BARCELONA

PUBLICACIONS DE L'INSTITUT DE CIENCIES

ARXIUS DE L'INSTITUT DE CIENCIES.

Any I. — Volum	I.	4 ptes.
» »	II.	4 »
» »	III.	4 »
» II. »	I.	4 »
» »	II.	4 »
» »	III.	4 »
» III. »	I.	4 »
» »	II.	4 »
» »	III.	4 »
» IV.— Fascicle	I.	2 »
» »	II.	2 »
» »	III.	2 »
» »	IV.	2 »
» »	V.	2 »

FLORA DE CATALUNYA, per J. Cadevall i A. Sallent.

Fascicle	I	5 ptes.
»	II.	5 »
»	III.	5 »
»	IV.	5 »
»	V.	5 »

TREBALLS DE LA SOCIETAT DE BIOLOGÍA, publicats sota la direcció de A. Pi Suñer.

Volum	I, 1913	10 ptes.
»	II, 1914	10 »
»	III, 1915	10 »
»	IV, 1916	En premsa.

FAUNA DE CATALUNYA, dirigida per J. M.ª Bofill i Pichot.

Fascicle	I. Malacología de Catalunya	5 ptes.
»	II. »	5 »
»	III. »	1 »

TREBALLS DE L'ESTACIÓ AEROLÓGICA DE BARCELONA, per E. Fontseré.

Volum I, 1914 .... 4 ptes.

COL·LECCIÓ DE CURSOS DE FÍSICA I MATEMÁTICA. Dirigida per E. Terradas

Volum I. Els elements discrets en la materia i la radiació. — Conferencies per E. Terradas, recullides per J. Pólit .... 3 ptes.

» II. Teoría de la representació conforme. — Conferencies donades el Juny de 1915 per J. Rey Pastor, redactades per E. Terradas.... 3 »

BIBLIOTECA FILOSÓFICA, dirigida per Eugeni d'Ors.

Volum I, Vives a Anglaterra, per Foster Watson .... En premsa.

» II, La Natura i l'Historia, per Pedro Dorado Montero.. »

Tallers d'Arts Gràfiques d'Henrich i Companyia. Carrer de Còrcega, 348. Barcelona.